• Instytut Podstawowych Problemów Techniki •
• Polska Akademia Nauk •

Tomasz G. Zieliński

Metoda Impulsowych Dystorsji Wirtualnych
z zastosowaniem do modelowania i identyfikacji defektów w konstrukcjach

Warszawa 2003

P R A C A   D O K T O R S K A

Autor:
Mgr inż. Tomasz G. Zieliński

Promotor:
Prof. dr hab. Jan Holnicki-Szulc

Recenzenci:
Prof. dr hab. Andrzej Garstecki
Doc. dr hab. Krzysztof Wiśniewski

Papier A4, ark. druk.: 10
Druk ukończono w październiku 2003
Skład w systemie TEX: T. G. Zieliński

Spis treści

Oznaczenia

Akronimy :

IMW – Impulsowa Macierz Wpływu

MDW – Metoda Dystorsji Wirtualnych

MES – Metoda Elementów Skończonych

MIDW – Metoda Impulsowych Dystorsji Wirtualnych

MRS – Metoda Różnic Skończonych

Oznaczenia :

$\hat{}$ – w przypadku odkształceń, np.: $\hat{\varepsilon}$, oznacza dystorsję wirtualną (wstępną deformację); w przypadku parametrów konstrukcyjnych, np.: $\hat{A}$, $\hat{b}$, $\hat{E}$, oznacza ich zmodyfikowaną wartość (przy czym modyfikacje tych parametrów, $\hat{A}/A$, $\hat{b}/b$, $\hat{E}/E$, można modelować wirtualnie za pomocą dystorsji); w przypadku uogólnionych sił węzłowych lub wektorów sił węzłowych, np.: $\hat{N}$, $\hat{\mathbf{Q}}^{(e)}$, $\hat{\mathbf{Q}}$, oznacza obciążenia kompensacyjne dla dystorsji

^{L} – oznacza liniową część danej wielkości (odkształceń lub sił wewnętrznych) – tj. pochodzącą od obciążenia zewnętrznego

^{R} – oznacza rezydualną część, czyli będącą wynikiem wstępnego wirtualnego sprężenia dystorsjami modelującymi modyfikacje ustroju

^{M} – oznacza wielkości otrzymane z pomiarów doświadczalnych

$^{(e)}$ – oznacza wielkości związane z elementem skończonym – w przypadku wielkości wektorowych określone w lokalnym układzie odniesienia elementu

Indeksy :

e – indeksuje elementy skończone

α – indeksuje funkcje odpowiedzi (funkcje przejścia) oraz składowe wektora funkcji odpowiedzi (funkcji przejścia)

i, j – zwykle $i, j \in \mathcal{D}$ – wtedy indeksuje dystorsje, odkształcenia, siły wewnętrzne, współczynniki sztywności (itp.) w lokalizacjach dystorsyjnych

p, q – indeksuje lokalizacje dystorsyjne, w których występuje *niezerowa* dystorsja, a więc współczynnik sztywności ulega zmianie: $\mu_p \neq 1$ $(p, q \in \mathcal{D}_{\mathcal{N}})$

z – indeksuje lokalizacje dystorsyjne, w których dystorsja jest *zerowa*, a więc nie ma zmiany współczynnika sztywności: $\mu_z = 1$ $(z \in \mathcal{D}_{\mathcal{Z}})$

t, τ – indeksuje chwile w dyskretnej przestrzeni czasu (nawet wtedy jednak, umieszczany zwykle jak parametr – patrz przypis 25, str. 91)

$\mathcal{D}$ – zbiór wszystkich lokalizacji dystorsyjnych

$\mathcal{D}_{\mathcal{N}} = \{i \in \mathcal{D} : \ \mu_i \neq 1\}$ – zbiór lokalizacji dystorsyjnych, w których występuje *niezerowa* dystorsja, a więc współczynnik sztywności ulega modyfikacji (wirtualnie)

$\mathcal{D}_{\mathcal{Z}} = \{i \in \mathcal{D} : \ \mu_i = 1\}$ – zbiór lokalizacji dystorsyjnych, w których dystorsja jest *zerowa*, a więc nie ma zmiany współczynnika sztywności

$\mathcal{T}$ – zbiór chwil w dyskretnej przestrzeni czasu

Pozostałe symbole:

δ_{ij} – symbol Kroneckera ($\delta_{ij} = 1$ dla $i = j$, $\delta_{ij} = 0$ dla $i \neq j$)

$\mathbf{q}$ – wektor uogólnionych przemieszczeń konstrukcji dyskretnej

$\mathbf{Q}$ – wektor uogólnionych sił węzłowych konstrukcji dyskretnej

$\hat{\mathbf{Q}}$ – wektor dystorsyjnego obciążenia węzłowego konstrukcji dyskretnej kompensacyjnego dla określonej dystorsji wirtualnej

$\mathbf{K}$ – globalna macierz sztywności konstrukcji

$\mathbf{M}$ – globalna macierz bezwładności konstrukcji (macierz mas)

$\mathbf{C}$ – globalna macierz tłumienia konstrukcji

$\boldsymbol{\varepsilon} = [\varepsilon_i]$ – wektor uogólnionych odkształceń konstrukcji dyskretnej

ε_i – odkształcenie uogólnione konstrukcji dyskretnej (całkowite odkształcenie w lokalizacji dystorsyjnej $i \in \mathcal{D}$)

$\overset{\text{L}}{\varepsilon}_i$ – liniowa część odkształcenia uogólnionego konstrukcji dyskretnej, a więc pochodząca od obciążenia zewnętrznego

$\overset{\text{R}}{\varepsilon}_i$ – rezydualna część odkształcenia uogólnionego konstrukcji, czyli będąca wynikiem wstępnego wirtualnego sprężenia dystorsjami

$\hat{\boldsymbol{\varepsilon}} = [\hat{\varepsilon}_i]$ – wektor dystorsji (w konstrukcji dyskretnej)

$\hat{\varepsilon}_i$ – dystorsja wirtualna (w konstrukcji dyskretnej)

$\mathbf{S} = [S_i]$ – wektor (właściwych) sił wewnętrznych konstrukcji dyskretnej

S_i – siła wewnętrzna (w konstrukcji dyskretnej)

$\overset{\text{L}}{S}_i$ – liniowa część siły wewnętrznej (w konstrukcji dyskretnej), a więc pochodząca od obciążenia zewnętrznego

$\overset{\text{R}}{S}_i$ – rezydualna część siły wewnętrznej (w konstrukcji dyskretnej), czyli będąca wynikiem wstępnego wirtualnego sprężenia dystorsjami

$\mathbf{D} = [D_{ij}]$ – odkształceniowa macierz wpływu

D_{ij} – składowe odkształceniowej macierzy wpływu

$\breve{\mathbf{D}} = [\breve{D}_{\alpha i}]$ – ogólna macierz wpływu (macierz odpowiedzi)

$\breve{D}_{\alpha i}$ – składowe ogólnej macierzy wpływu

$\mathbf{f} = [f_\alpha]$ – wektor funkcji odpowiedzi (wektorowa funkcja odpowiedzi)

f_α – funkcje odpowiedzi (składowe wektora funkcji odpowiedzi)

$\overset{\text{L}}{f}_\alpha$ – liniowa część odpowiedzi ustroju, a więc pochodząca od obciążenia zewnętrznego

$\overset{\text{R}}{f}_\alpha$ – rezydualna część odpowiedzi ustroju, czyli będąca wynikiem wstępnego wirtualnego sprężenia dystorsjami

$A_{ij} = \delta_{ij} - (1 - \mu_i) D_{ij}$ – macierz główna dla układów równań w algorytmach MDW

$\mathbf{p} = [p_s]$ – wektor parametrów konstrukcyjnych

p_s, $\hat{p}_s$ – parametr konstrukcyjny i jego zmodyfikowana wartość

$\boldsymbol{\lambda} = [\lambda_s]$ – wektor modyfikacji parametrów konstrukcyjnych

$\lambda_s = \frac{\hat{p}_s}{p_s}$ – modyfikacja parametru konstrukcyjnego (*Uwaga*: wyjątkowo w podrozdziale 3.6 symbol λ wykorzystywany jest w zupełnie innym celu – do oznaczenia wartości własnych macierzy sztywności elementu skończonego)

k_i, $\hat{k}_i$ – współczynnik sztywności oraz jego zmodyfikowana wartość

$\mu_i = \frac{\hat{k}_i}{k_i}$ – parametr zmiany współczynnika sztywności

$\boldsymbol{\mu} = [\mu_i]$ – wektor zmiany sztywności

$k_{EA} = EA$ – współczynnik sztywności podłużnej pręta

$k_{EJ} = EJ_z$ – współczynnik sztywności zgięciowej (krzywiznowej) belki

$\mu_{EA} = \frac{\hat{k}_{EA}}{k_{EA}}$ – parametr zmiany współczynnika sztywności podłużnej

$\mu_{EJ} = \frac{\hat{k}_{EJ}}{k_{EJ}}$ – parametr zmiany współczynnika sztywności zgięciowej

E, ν, $G = \frac{E}{2(1+\nu)}$ – moduł Younga, liczba Poissona oraz moduł Kirchhoffa dla izotropowego materiału sprężystego

b, h – szerokośc i wysokość prostokątnego przekroju poprzecznego

A – pole przekroju poprzecznego pręta

J_z – moment bezwładności pola przekroju poprzecznego pręta

β_y – bezwymiarowa charakterystyka kształtu przekroju poprzecznego pręta

L – długość elementu prętowego

n_x, t_y, m_z – obciążenia zewnętrzne działające na jednostkę długości belki płaskiej – odpowiednio: siła podłużna, siła poprzeczna oraz moment zginający (w płaszczyźnie $z = \mathrm{const}$)

N_x, T_y, M_z – uogólnione siły przekrojowe belki płaskiej – odpowiednio: siła podłużna, siła poprzeczna oraz moment zginający belkę (w płaszczyźnie $z = \mathrm{const}$)

u, w, φ_z – uogólnione przemieszczenia osi belki – odpowiednio: przemieszczenia poziome i pionowe oraz kąt obrotu w płaszczyźnie belki

ϵ_x, ρ_y, κ_z – uogólnione odkształcenia belki – odpowiednio: odkształcenie podłużne (wydłużenie osi pręta), odkształcenia postaciowe (uśredniony kąt odkształcenia postaciowego) oraz odkształcenia zgięciowe (krzywizna osi pręta)

$\boldsymbol{\epsilon}$ – wektor uogólnionych odkształceń – dla belki płaskiej: $\boldsymbol{\epsilon} = [\epsilon_x\ \rho_y\ \kappa_z]^{\mathrm{T}}$ lub $[\epsilon_x\ \kappa_z]^{\mathrm{T}}$

$\hat{\boldsymbol{\epsilon}}$ – wektor uogólnionych dystorsji "punktowych" (tj. w *continuum*, w punkcie elementu strukturalnego, a nie w elemencie skończonym) – dla belki płaskiej: $\hat{\boldsymbol{\epsilon}} = [\hat{\epsilon}_x\ \hat{\rho}_y\ \hat{\kappa}_z]^{\mathrm{T}}$ lub $[\hat{\epsilon}_x\ \hat{\kappa}_z]^{\mathrm{T}}$

$\mathbf{q}^{(e)}$ – wektor uogólnionych przemieszczeń węzłowych elementu skończonego – dla elementu ramy płaskiej: $\mathbf{q}^{(e)} = [u_1\ w_1\ \varphi_1\ u_2\ w_2\ \varphi_2]^{\mathrm{T}}$

$\mathbf{Q}^{(e)}$ – wektor uogólnionych sił węzłowych elementu skończonego – dla elementu ramy płaskiej: $\mathbf{Q}^{(e)} = [N_1\ T_1\ M_1\ N_2\ T_2\ M_2]^{\mathrm{T}}$

$\mathbf{K}^{(e)}$, $\mathbf{M}^{(e)}$, $\mathbf{C}^{(e)}$ – macierze: sztywności, bezwładności i tłumienia elementu skończonego

$\mathbf{u}^{(e)}(x)$ – funkcja wektorowa pola przemieszczeń elementu skończonego – dla elementu ramy płaskiej: $\mathbf{u}^{(e)}(x) = [u^{(e)}(x)\quad w^{(e)}(x)\quad \varphi_z^{(e)}(x)]^{\mathrm{T}}$

$\mathbf{N}^{(e)}(x)$ – macierz funkcji kształtu elementu skończonego

$N_{uu_1}(x), \ldots, N_{\varphi\varphi_2}(x)$ – funkcje kształtu elementu skończonego ramy płaskiej

$\boldsymbol{\epsilon}^{(e)}(x)$ – funkcja wektorowa pola odkształceń elementu skończonego – dla elementu ramy płaskiej: $\boldsymbol{\epsilon}^{(e)}(x) = \left[\epsilon_x^{(e)}(x) \quad \rho_y^{(e)}(x) \quad \kappa_z^{(e)}(x)\right]^{\mathrm{T}}$ lub $\left[\epsilon_x^{(e)}(x) \quad \kappa_z^{(e)}(x)\right]^{\mathrm{T}}$

$\mathbf{B}^{(e)}(x)$ – macierz pochodnych funkcji kształtu elementu skończonego (tzw. macierz odkształcenie-przemieszczenie)

$\xi = \frac{2x}{L} - 1$ – współrzędna bezwymiarowa parametryzująca element skończony ramy płaskiej

$\boldsymbol{\varepsilon}^{(e)}$ – wektor parametrów deformacji elementu skończonego – dla elementu ramy płaskiej: $\boldsymbol{\varepsilon}^{(e)} = \left[\varepsilon_x^{(e)} \; \varkappa_z^{(e)} \; \chi_z^{(e)}\right]^{\mathrm{T}}$

$\varepsilon_x^{(e)}, \varkappa_z^{(e)}, \chi_z^{(e)}$ – parametry deformacji elementu skończonego ramy płaskiej – odpowiednio: parametr odkształcenia podłużnego oraz parametry deformacji zgięciowej (krzywiznowej) czystego zginania i zginania antysymetrycznego

$\boldsymbol{\varepsilon}_{\varepsilon}^{(e)}, \boldsymbol{\varepsilon}_{\varkappa}^{(e)}, \boldsymbol{\varepsilon}_{\chi}^{(e)}$ – wektory deformacji własnych (bazowych) elementu skónczonego ramy płaskiej – odpowiednio: czyste rozciąganie osiowe, czyste zginanie oraz zginanie antysymetryczne względem środka elementu (zginanie ze ścinaniem)

$\mathbf{q}_{\varepsilon}^{(e)}, \mathbf{q}_{\varkappa}^{(e)}, \mathbf{q}_{\chi}^{(e)}$ – wektory uogólnionych przemieszczeń węzłowych elementu ramy płaskiej związane z jego odpowiednimi deformacjami własnymi

$\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}^{(e)}$ – wektor dystorsji (odkształceń wstępnych) elementu skończonego – dla elementu ramy płaskiej: $\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}^{(e)} = \left[\varepsilon_x^{(e)} \; \varkappa_z^{(e)} \; \chi_z^{(e)}\right]^{\mathrm{T}}$

$\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_{\varepsilon}^{(e)}, \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_{\varkappa}^{(e)}, \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_{\chi}^{(e)}$ – wektory dystorsji jednostkowych elementu skończonego ramy płaskiej – odpowiednio: dystorsja podłużna, dystorsja czystego zginania oraz dystorsja zginania antysymetrycznego

$\hat{\mathbf{q}}_{\varepsilon}^{(e)}, \hat{\mathbf{q}}_{\varkappa}^{(e)}, \hat{\mathbf{q}}_{\chi}^{(e)}$ – wektory uogólnionych przemieszczeń węzłowych elementu ramy płaskiej związane z jego odpowiednimi dystorsjami jednostkowymi

$\mathbf{S}^{(e)}$ – wektor sił wewnętrznych elementu skończonego – dla elementu skończonego ramy płaskiej: $\mathbf{S}^{(e)} = \left[N_{x\,\mathrm{const}}^{(e)} \; M_{z\,\mathrm{const}}^{(e)} \; M_{z\,\mathrm{asym}}^{(e)}\right]^{\mathrm{T}}$

$N_{x\,\mathrm{const}}^{(e)}, M_{z\,\mathrm{const}}^{(e)}, M_{z\,\mathrm{asym}}^{(e)}$ – składowe wektora sił wewnętrznych elementu skończonego ramy płaskiej – odpowiednio: siła podłużna, "czysto-zgięciowa" część momentu zginającego oraz część momentu opisująca zginanie ze ścinaniem (zginanie antysymetryczne)

$\hat{\mathbf{Q}}^{(e)}$ – wektor węzłowych obciążeń kompensacyjnych dla dystorsji w elemencie skończonym

$\hat{\mathbf{Q}}_{\varepsilon}^{(e)}, \hat{\mathbf{Q}}_{\varkappa}^{(e)}, \hat{\mathbf{Q}}_{\chi}^{(e)}$ – wektory węzłowych obciążeń kompensacyjnych dla odpowiednich dystorsji jednostkowych elementu skończonego ramy płaskiej

Dla rozdziałów 5, 6 i 7:

$f_{\mathrm{cel}}(\boldsymbol{\lambda})$ – funkcja celu

$\boldsymbol{\lambda} = \left[\lambda_s\right]$ – wektor modyfikacji parametrów konstrukcyjnych (tak jak dotychczas), którego składowe stanowią teraz również *parametry funkcji celu*

$\mathcal{L}$ – zbiór dopuszczalnych wektorów parametrów funkcji celu ($\boldsymbol{\lambda} \in \mathcal{L}$) określony przez ograniczenia nałożone na te parametry (czyli ograniczenia modyfikacji strukturalnych)

$\delta(t)$ – funkcja uogólniona (dystrybucja) delta Diraca

m, c, k – masa, tłumienie i sztywność układu o jednym stopniu swobody

$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$, $\zeta = \frac{c}{2m\omega}$, $\omega_{\mathrm{d}} = \omega\sqrt{1-\zeta^2}$ – częstość drgań własnych, bezwymiarowy parametr tłumienia oraz częstość kołowa drgań tłumionych układu o jednym stopniu swobody

$I_\tau,\ I_0$ − impuls siły (w chwili τ oraz $\tau = 0$)

$h_\tau(t),\ h_0(t)$ − impulsowa funkcja przejścia (dla impulsu w chwili τ oraz $\tau = 0$)

$\mathbf{h}(t) = \big[h_{ij}(t)\big]$ − macierz impulsowych funkcji przejścia

$\hat{\mathbf{v}}_0$ − wektor prędkości początkowych adekwatny impulsowi dystorsji jednostkowej

$\mathbf{D}(t) = \big[D_{ij}(t)\big]$ − odkształceniowa impulsowa macierz wpływu

$D_{ij}(t)$ − składowe odkształceniowej impulsowej macierzy wpływu

$\tilde{\mathbf{D}}(t) = \big[\breve{D}_{ij}(t)\big]$ − przybliżona impulsowa macierz wpływu

$\tilde{D}_{ij}(t)$ − składowe przybliżonej impulsowej macierzy wpływu

$\breve{\mathbf{D}}(t) = \big[\breve{D}_{\alpha i}(t)\big]$ − ogólna impulsowa macierz wpływu

$\breve{D}_{\alpha i}(t)$ − składowe ogólnej impulsowej macierzy wpływu

$\mathbf{f}(t) = \big[f_\alpha(t)\big]$ − wektor funkcji przejścia (wektorowa funkcja przejścia)

$f_\alpha(t)$ − funkcje przejścia (składowe wektora funkcji przejścia)

$\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}(t) = \big[\hat{\varepsilon}_i(t)\big]$ − wektor dystorsji dynamicznych (wektor funkcji dystorsji)

$\hat{\varepsilon}_i(t)$ − dynamiczna dystorsja wirtualna (funkcja dystorsji)

$A^0_{ij} = \delta_{ij} - (1 - \mu_i)D_{ij}(0)$ − macierz główna dla układów równań w algorytmach MIDW

$\mathbf{F} = \big[F_t\big]$ − wektor chwilowych stanów konstrukcji

F_t − funkcja chwilowego stanu konstrukcji

Dla rozdziału 8:

Q_p − odczyt (ładunek elektryczny) na piezo-sensorze

$Q_\mathrm{pg},\ Q_\mathrm{pd}$ − odczyt na sensorach (górnym i dolnym) przyklejonych po obu stronach belki

c_p − charakterystyka piezoelektryczna piezo-sensora (zależna od stałej piezoelektryka oraz wymiarów sensora)

y_p − odległość między osią belki a osią naklejonego na nią piezo-sensora

L_p − długość piezo-sensora

$\tilde{\epsilon}_x \overset{\mathrm{def}}{=} \int\limits_{L_\mathrm{p}} \epsilon_x(x)\,dx,\ \ \tilde{\kappa}_z \overset{\mathrm{def}}{=} \int\limits_{L_\mathrm{p}} \kappa_z(x)\,dx$ − scałkowane odkształcenia fragmentu belki z sensorem

$f_\mathrm{ident}(\boldsymbol{\lambda})$ − funkcja celu dla zagadnienia identyfikacji defektów

$\boldsymbol{\lambda} = \big[\lambda_s\big]$ − wektor defektów (a zarazem – tak jak dotychchczas – wektor modyfikacji parametrów konstrukcyjnych), którego składowe stanowią również parametry funkcji celu dla zagadnienia identyfikacji defektów

$\overset{\mathrm{M}}{f}_\alpha(t)$ − funkcje przejścia otrzymane z pomiarów doświadczalnych

Rozdział 1

Wstęp

1.1. Podstawowe cele pracy

Głównym celem rozprawy jest zaprezentowanie oryginalnej koncepcji zastosowania idei tzw. *dystorsji wirtualnych* do problemów dynamiki konstrukcji. Do tej pory podejście dystorsyjne stosowano z powodzeniem w zagadnieniach statyki konstrukcji w postaci tzw. *Metody Dystorsji Wirtualnych* (MDW) (ptarz np.: [15, 16, 21]). Fundamentem dla wszelkich obliczeń dokonywanych w ramach tej metody jest tzw. *macierz wpływu*. Taką statyczną macierz wpływu starano się również w specyficzny sposób[1)] wykorzystywać w celu rozwiązania pewnych problemów dynamicznych [33, 34]. W niniejszej pracy zostanie przedstawiona *Metoda Impulsowych Dystorsji Wirtualnych* (MIDW) pozwalająca na w pełni konsekwentne wykorzystanie podejścia dystorsyjnego dla zagadnień dynamiki konstrukcji. Ten uwidoczniony w tytule cel nie jest jednak jedynym zadaniem niniejszej rozprawy.

Pośrednim, choć również istotnym zamierzeniem autora było przedstawienie ogólnej metodologii realizacji idei dystorsji wirtualnych w konstrukcjach składających się z dowolnych elementów skończonych. Praca, a zwłaszcza zawarte w niej obliczenia i przykłady numeryczne bazują na zrealizowanym przez autora obiektowym programie dotyczącym *Metody Elementów Skończonych* (MES) dla mechaniki konstrukcji, w którym po raz pierwszy zaprojektowano i zrealizowano *obiektowe* ujęcie metod dystorsyjnych (zarówno

[1)] Obliczenia były dokonywane na kolejnych krokach iteracji czasowej, przy czym dla każdego kroku niezależnie musiała być wpierw obliczona aktualna macierz wpływu. Podejście to z punktu widzenia metod dystorsyjnych nie różniło się w istocie od statycznej MDW.

dla statyki jak i oczywiście dla dynamiki). Obiektowa realizacja oprogramowania (a zatem "przyjazna" w użyciu i łatwa do rozbudowy) stanowiła z punktu widzenia autora kolejny, bardzo ważny cel pracy.

Praca prezentuje sposób wykorzystania dystorsji wirtualnych do opisu wrażliwości konstrukcji obciążonej dynamicznie na modyfikację parametrów, związanych z jej cechami sztywnościowymi. Kolejnym zamierzeniem było więc opracowanie algorytmu opartego na MIDW, pozwalającego dokładnie obliczać gradienty tzw. funkcji przejścia (czyli odpowiedzi układu na określone wymuszenia dynamiczne), opisujących propagację fali sprężystej wzbudzonej w konstrukcji.

Końcowym zadaniem niniejszej rozprawy jest zastosowanie podejścia dystorsyjnego do problemu modelowania i identyfikacji defektów w konstrukcjach, m.in. w celu niebanalnej weryfikacji opracowanych metod i algorytmów. Proponowana metoda identyfikacji opiera się na analizie różnicy pomiędzy propagacją fali sprężystej w rzeczywistej konstrukcji, a symulacją tejże propagacji w modelu MES, w którym wpływ ewentualnych defektów modelowany jest dystorsjami. Wzbudzanie i odczyt fali sprężystej wymaga omówienia podstaw zagadnienia *piezodiagnostyki*, natomiast środkiem do realizacji proponowanej metody identyfikacji defektów jest stanowiąca główny temat pracy Metoda Impulsowych Dystorsji Wirtualnych i oparty na niej algorytm gradientowej analizy funkcji przejścia.

Reasumując, jeżeli zrezygnujemy z hierarchii ważności na rzecz logicznej kolejności celów to można wyróżnić kolejno następujące zadania, które starano się zrealizować:

- ogólny opis algorytmów (statycznej) Metody Dystorsji Wirtualnych pozwalający na skuteczną jej realizację dla konstrukcji składającej się z dowolnych (różnych) elementów skończonych,
- przedstawienie metod wykorzystania dystorsji wirtualnych do modelowania defektów i parametrów projektowych,
- zastosowanie MDW do analizy wrażliwości ustroju statycznego,
- opracowanie Metody Impulsowych Dystorsji Wirtualnych, bazującej na tzw. *metodzie impulsowej funkcji przejścia*, umożliwiając tym samym stosowanie metod dystorsyjnych w zagadnieniach dynamiki małych drgań,
- opracowanie bazującego na MIDW algorytmu gradientowej analizy funkcji przejścia – analiza wrażliwości konstrukcji pod obciążeniem dynamicznym,
- stworzenie obiektowej implementacji MDW oraz MIDW opartej na (stworzonym w tym celu) obiektowo-zorientowanym programie MES dla mechaniki konstrukcji,
- przetestowanie opracowanej metodologii i stworzonego oprogramowania m.in. na przykładach dotyczących zagadnienia identyfikacji defektów w konstrukcjach.

1.2. Koncepcja rozprawy

Zaprezentowana powyżej logiczna hierarchia celów determinuje po części również koncepcję niniejszej rozprawy doktorskiej. Jej dokładny opis zawarty jest w streszczeniu głównych rozdziałów pracy, przedstawionym poniżej.

Metoda Dystorsji Wirtualnych (MDW)

W rozdziale tym zaprezentowana zostanie główna idea oraz podstawowe pojęcia i związki składające się na klasyczną (tj. statyczną) Metodę Dystorsji Wirtualnych. Podany zostanie algorytm obliczania – fundamentalnej dla tej metody – macierzy wpływu (statycznej). Wymienione zostaną problemy i zagadnienia, w których z powodzeniem zastosowano podejście dystorsyjne. Wszelkie definicje podane będą na poziomie jak najbardziej ogólnym, jednakże bezpośrednią ilustracją dla nich będą konstrukcje kratowe (ze względu na ich prostotę pozwalającą na bardzo łatwą prezentację nowych pojęć i koncepcji). Również przykłady obliczania macierzy wpływu zostaną pokazane na przykładzie kratownic.

Dystorsje wirtualne w płaskiej konstrukcji ramowej

Rozdział zaprezentuje MDW dla płaskich konstrukcji ramowych. Uchwycone zostaną aspekty, które ulegają trywializacji w przypadku konstrukcji kratowych. Na przykładzie elementu skończonego ramy płaskiej przedstawiony zostanie ogólny sposób postępowania, który należy stosować w przypadku realizowania podejścia dystorsyjnego dla dowolnych elementów skończonych. W rozdziale przedstawione również zostanie modelowanie defektów w elementach ramowych.

Modelowanie dystorsjami parametrów konstrukcyjnych

W rozdziale podany będzie sposób wykorzystania dystorsji wirtualnych do modelowania zmian parametrów konstrukcyjnych (w tym defektów), wpływających na cechy sztywnościowe konstrukcji. Zaprezentowane równania i algorytmy dotyczyć będą konstrukcji składających się z dowolnych elementów skończonych, w których aspekt dystorsyjny zrealizowano według metodologii podanej w poprzednim rozdziale.

Zastosowanie MDW do analizy wrażliwości konstrukcji statycznej

Rozdział dotyczyć będzie zastosowania MDW do analizy wrażliwości ustroju statycznego, badającej w jaki sposób zmieniają się jego własności w odpowiedzi na niewielką modyfikację zmiennej projektowej (rozumianej jako zmiana pewnego parametru konstrukcyjnego). Opracowany zostanie algorytm wyznaczania gradientu tzw. funkcji odpowiedzi, który stanowi podstawę do obliczenia gradientu (ogólniejszej) funkcji celu. Pokazane zostanie, że istota obliczeń sprowadza się w zasadzie do wyznaczenia gradientu dystorsji.

Metoda Impulsowych Dystorsji Wirtualnych (MIDW)

Rozdział przedstawi oryginalną metodę pozwalającą na konsekwentne wykorzystanie idei dystorsji wirtualnych w problemach dynamiki, związanych z analizą funkcji przejścia opisującej propagację fali sprężystej. Bazą dla metody stanowić będzie szczegółowo zaprezentowana w poprzednich rozdziałach Metoda Dystorsji Wirtualnych oraz metoda impuslowej funkcji przejścia. Wprowadzone zostaną nowe pojęcia *elementarnego impulsu dystorsji* oraz *impulsowej macierzy wpływu*. Poprawność wyników otrzymywanych przy wykorzystaniu MIDW będzie zweryfikowana oraz wyszczególnione zostaną jej charakterystyczne cechy i ograniczenia.

Zastosowanie MIDW do analizy wrażliwości w dynamice konstrukcji

Zdefiniowana zostanie pewna klasa funkcji celu, bazujących na zależności pomiędzy funkcją przejścia, a parametrami sztywnościowymi konstrukcji. Podany zostanie algorytm obliczania gradientu takich funkcji, przy czym zastosowanie MIDW pozwoli na wyprowadzenie i wykorzystanie analitycznych formuł na wrażliwość sztywnościową konstrukcji. Dodatkowo szczegółowo przedstawiona zostanie zoptymalizowana wersja algorytmu, nadająca się bezpośrednio do realizacji numerycznej. Poprawność obliczania gradientów zostanie potwierdzona przez porównanie z wynikami uzyskanymi przy zastosowaniu Metody Różnic Skończonych.

Identyfikacja defektów

Przedstawione zostanie zagadnienie identyfikacji defektów, bazujące na analizie różnicy pomiędzy funkcjami przejścia opisującymi propagację fali sprężystej w konstrukcji rzeczywistej i w modelu MES, w którym wpływ ewentualnych defektów modelowany jest przez dystorsje. Omówione zostaną podstawy *piezodiagnostyki* (odczyt funkcji przejścia). Podany zostanie algorytm identyfikacji defektów, oparty na analizie wrażliwości (MIDW) przedstawionej w poprzednim rozdziale. Jako przykłady służyć będą testy numeryczne identyfikacji uszkodzeń wspornika kratowego. Zaprezentowana również zostanie identyfikacja defektów w belce wspornikowej bazująca na funkcjach przejścia uzyskanych z przeprowadzonego eksperymentu piezodiagnostyki.

1.3. Zarys literatury

Idea dystorsji sprężystych zaprezentowana została w znanej pracy Nowackiego [41], dotyczącej teorii sprężystości. Jeden z rozdziałów tej obszernej pracy poświęcony jest w całości zagadnieniu dystorsji w continuum sprężystym. W kontekście dystorsyjnym omówiono tam zasady wariacyjne oraz twierdzenie o wzajemności prac. Podano podstawowe związki i twierdzenia dotyczące teorii samonaprężenia. Problem dystorsji został również poruszony przez tego autora w pracy [42].

Jedne z pierwszych zastosowań metod dystorsyjnych dotyczą opisu możliwych stanów sprężeń w jedno- i wielofazowych ośrodkach sprężystych. Tych zagadnień sprężania dotyczą wczesne prace Holnickiego-Szulca [10, 11, 12] oraz [18].

Bardzo obszerną analizę zagadnienia dystorsji wirtualnych można znaleźć w monografiach Holnickiego-Szulca [15, 16] oraz Holnickiego-Szulca i Gierlińskiego [21]. W pracach tych omówione jest zastosowanie dystorsji do modelowania modyfikacji konstrukcyjnych (analiza nieliniowa), prezentują także strategie optymalnego pasywnego i aktywnego sterowania oraz optymalnego przeprojektowywania.

Oczywistym zastosowaniem metod dystorsyjnych okazało się modelowanie pracy elementów aktywnych w konstrukcjach sterowalnych (tzw. *smart structures*). Tego typu rozwiązania prezenowane są w publikacjach Holnickiego-Szulca i Mroza [24], Holnickiego-Szulca i Haftki [22] oraz Holnickiego-Szulca [17, 19], jak również Holnickiego-Szulca i Wikły [26, 27] oraz Holnickiego-Szulca, Pawłowskiego i Wikły [25].

Wykorzystanie Metody Dystorsji Wirtualnych w analizie wrażliwości konstrukcji kratowych wraz z zastosowaniem do zagadnienia optymalnego przeprojektowywania zaprezentował Kołakowski i Holnicki-Szulc [36, 37]. Całościowe ujęcie tego tematu pojawiło się w publikacji Kołakowskiego [35]. W pracy tej oprócz wrażliwości pól odkształceń i naprężeń w zakresie sprężystym oraz sprężysto-plastycznym autor przedstawił również sposoby wyznaczania wrażliwości takich parametrów jak granica plastyczności, czy współczynnik wzmocnienia materiału. Omówiona również została idea zastosowania MDW w problemach projektowania konstrukcji adaptowalnych na ekstremalne obciążenie, gdzie dystorsje wykorzystuje się do modelowania aktywnych dyssypatorów energii. Rozwiązania związane z aktywnym rozpraszaniem energii modelowanym dystorsyjnie stosowane były również przez Wikłę, Holnickiego-Szulca i Pawłowskiego [26, 25, 27]. Natomiast problemy optymalnego przeprojektowywania polegającego na przenoszeniu materiału z jednego miejsca w inne były już wcześniej prezentowane, m.in. w pracach [8, 14, 20]. Zbliżone podejście do zagadnień przeprojektowywania prezentowali również Garstecki i Glema [7] oraz Sobieszczański-Sobieski [48]. Dystorsyjnego przeprojektowywania ustrojów ramowych dotyczyły prace Makodego, Ramireza i Corotisa [40] oraz Putreszy [46].

W publikacjach Wiącka i Holnickiego-Szulca [50, 51, 52] dystorsje wykorzystano do modelowania postępującego rozwoju rys, w kontekście monitorowania stanu budowli historycznych. Zebrania i całościowego omówienia tych zagadnień dokonał Wiącek w pracy [53]. Wcześniej Holnicki-Szulc omawiał już zastosowanie dystorsji wirtualnych dla problemu degradacji konstrukcji sprężystych [13].

MDW znalazła również zastosowanie w opisie odcinkami liniowo modelowanych nieliniowości fizycznych typu *locking materials* lub ustrojów z luzami wewnętrznymi [10].

Holnicki-Szulc i Zieliński zaproponowali metodę identyfikacji uszkodzeń w konstrukcjach opartą na analizie zaburzeń propagacji fal sprężystych [28, 29, 30]. Zaprezentowane przez nich podejście bazuje na idei impulsów dystorsji wirtualnych. Idea ta została w pełni opisana, dopracowana i rozwinięta w niniejszym opracowaniu.

Praca Maćkiewicza [39] prezentuje zastosowanie podejścia dystorsyjnego do optymalnego lokalizowania wzbudników w aktywnej kontroli naprężeń.

Ciekawym zastosowanie metod dystorsyjnych jest modelowanie i analiza sieci wodnych [23] (Holnicki-Szulc, Kołakowski i Nasher). Stało się to możliwe dzięki zaadoptowaniu idei i algorytmów MDW dla równań przepływu cieczy, bazując na analogiach pomiędzy równaniami równowagi, związkami geometrycznymi oraz konstytutywnymi mechaniki konstrukcji kratowych i hydrauliki.

Metoda Dystorsji Wirtualnych znalazła również komercyjne zastosowanie. Jako *Virtual Distortion Method* została wykorzystana przez brytyjską firmę *WS Atkins* w komercyjnym programie komputerowym *RASOS* do analizy postępującego zniszczenia oraz analizy niezawodności wież wiertniczych, tzw. *offshore structures* [49] (Turner i inni).

Publikacja Akgüna, Garcelona, Haftki [1] dostarcza bardzo aktualnego porównania Metody Dystorsji Wirtualnych z innymi metodami liniowej i nieliniowej analizy i modelowania konstrukcji.

Rozdział 2

Metoda Dystorsji Wirtualnych (MDW)

2.1. Wprowadzenie

Rozdział ten w bardzo przystępny sposób prezentuje Metodę Dystorsji Wirtualnych (MDW) w klasycznym ujęciu dla statyki konstrukcji. Metoda ta opiera się na wykorzystaniu pól wstępnych deformacji do modelowania zmian materiałowych w konstrukcji. Zagadnienie statycznej MDW oraz wykorzystywane przez nią pojęcia i związki zostaną pokazane w tym rozdziale na przykładzie **konstrukcji kratowych**. Jest tak m.in. dlatego, że algorytmy numeryczne bazujące na zastosowaniu idei dystorsji wirtualnych były tworzone i wykorzystywane głównie dla ustrojów kratowych (chociaż nie tylko), gdzie podejście to wykazało swą efektywność dla pewnej klasy zagadnień. O wiele jednak ważniejszą przyczyną jest fakt, że już na przykładzie stosunkowo prostych konstrukcji jakimi są kratownice można omówić praktycznie wszystkie podstawowe pojęcia jakimi posługuje się MDW. Należy jednak pamiętać, iż pomimo tego, że zamieszczone w tym rozdziale przykłady i wyprowadzenia wzorów odnosić się będą do teorii kratownic, to jednak przedstawiony opis postępowania (tak jak i użyte sformułowania) dotyczyć będzie (pod pewnymi warunkami) zupełnie dowolnych konstrukcji.

Względna prostota teorii krat wynika m.in. z faktu, że w kratownicach wszystkie obciążenia muszą być przyłożone w węzłach (przegubach). Zatem już na poziomie teorii konstrukcji mamy w tym przypadku do czynienia z dyskretyzacją obciążenia. Jest to jedna z przyczyn tego, że wielkości, którymi się posługujemy w teorii krat, tak samo jak i zależności pomiędzy nimi, są stosunkowo nieskomplikowane.

W istotny dla dalszych rozważań sposób scharakteryzujmy tutaj niektóre podstawowe pojęcia i związki dotyczące pręta kratowego, a szczególnie istotne przy omawianiu MDW – są to:

- N – **siła osiowa**, stała na całej długości pręta kraty. Jest to jedyna składowa *sił wewnętrznych* (tzw. *uogólnionych naprężeń*) z jakimi mamy do czynienia w konstrukcjach kratowych.
- ε – **odkszkatłcenie podłużne**, stanowiące jedyne *odkształcenie uogólnione* w pręcie kratownicy i (podobnie jak w przypadku siły osiowej) również niezmienne na całej długości pręta kratowego.
- $N = k_{EA}\,\varepsilon$ – **związek konstytutywny**, wiążący ze sobą (liniowo) dwie powyższe wielkości przy pomocy **sztywności podłużnej**, która jest iloczynem modułu Younga sprężystego materiału pręta oraz pola jego przekroju poprzecznego: $k_{EA} = EA$. Taka postać związku konstytutywnego zakłada, że całe odkształcenie pręta ε jest wynikiem obciążenia statycznego. Ogólna postać

$$N = k_{EA}(\varepsilon - \hat{\varepsilon}) \tag{2.1}$$

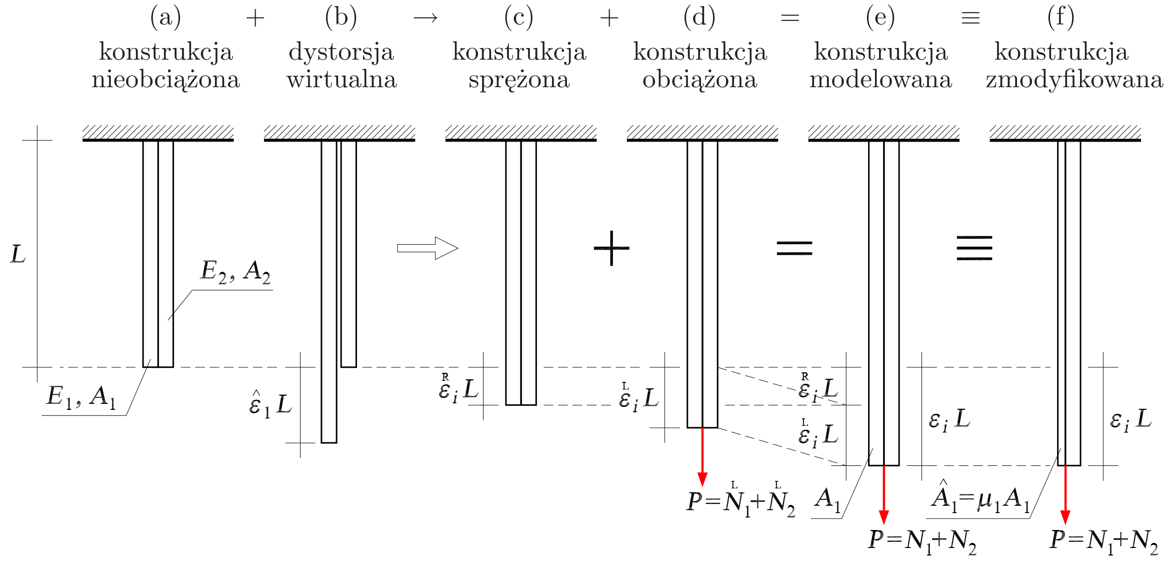
  uwzględnia wpływ *oddziaływań pozastatycznych* (takich jak np. ogrzanie pręta), których wynikiem jest odkształcenie $\hat{\varepsilon}$. Konsekwentnie również i ta część odkształcenia powinna być stała na całej długości elementu kratowego (przyjmujemy zatem np., że pręt ogrzany jest równomiernie). Często korzystamy z odwrotnej postaci związku konstytutywnego: $\varepsilon = N/k_{EA} + \hat{\varepsilon}$, gdzie odwrotną do sztywności wielkość $1/k_{EA}$ nazywamy **podatnością**.

2.2. Podstawowe pojęcia i istota MDW

Główną ideę **Metody Dystorsji Wirtualnych** można wyjaśnić już na przykładzie bardzo prostej konstrukcji przedstawionej na rys. 2.1(a), składającej się z dwóch prętów złączonych razem (zatem deformacja jednego z nich wymusza odkształcenie drugiego). Tę dwuelementową konstrukcję będziemy rozpatrywać w ramach teorii krat. Moduł Younga i pole poprzecznego przekroju pręta nr 1 wynoszą: E_1, A_1, natomiast dla pręta nr 2 są to odpowiednio: E_2, A_2.

Przyjmijmy teraz, że *swobodny* element nr 1 doznał pewnego *wstępnego* wydłużenia (rys. 2.1(b)). Odkształcenie $\hat{\varepsilon}_1$ odpowiadające temu wydłużeniu nazywamy **dystorsją wirtualną**. Oczywiście element ten jest wmontowany w konstrukcję, zatem z uwagi na warunek ciągłości deformacji układu, w obu prętach konstrukcji powstaną pewne pola odkształceń i naprężeń. Otrzymamy tzw. *konstrukcję sprężoną* (rys. 2.1(c)). Spowodowane wprowadzeniem dystorsji pole odkształceń to tzw. *odkształcenia rezydualne* $\overset{\mathrm{R}}{\varepsilon}_i$, którym towarzyszy samorównoważne pole naprężeń uogólnionych $\overset{\mathrm{R}}{N}_i$ $(i = 1, 2)$. Zależność tych pól od wywołujących je dystorsji wirtualnych wyraża się następującymi wzorami:

$$\overset{\mathrm{R}}{\varepsilon}_i = \sum_j D_{ij}\,\hat{\varepsilon}_j, \qquad \overset{\mathrm{R}}{N}_i = E_i A_i \sum_j (D_{ij} - \delta_{ij})\,\hat{\varepsilon}_j, \tag{2.2}$$



Rys. 2.1. Schemat ideowy Metody Dystorsji Wirtualnych.

gdzie pojawia się macierz $\mathbf{D} = \left[D_{ij}\right]$, zwana **macierzą wpływu**. Stanowi ona podstawę dla wszystkich (w praktyce – numerycznych) obliczeń Metody Dystorsji Wirtualnych. Macierzą tą zajmiemy się dokładniej w dalszej części tego rozdziału, gdzie podamy również procedurę jej wyznaczania. Teraz wystarczy tylko powiedzieć, że element D_{ij} macierzy wpływu określa odkształcenia w i-tym elemencie konstrukcji spowodowane **jednostkową dystorsją wirtualną** $\hat{\varepsilon}_j = 1$ nałożoną na element j.

Jak widać wpływ dystorsji wirtualnej na konstrukcję może być utożsamiany z takimi pozastatycznymi oddziaływami jak *imperfekcja geometryczna* lub *obciążenie termiczne* (ogrzanie elementu). Ujawnia się tutaj jeden z aspektów wspomnianej prostoty zagadnienia dystorsji wirtualnych w kratownicach, wyraźny szczególnie przy konstruowaniu macierzy wpływu w oparciu o Metodę Elementów Skończonych (MES). Otóż w przypadku elementów kratowych wektor odkształceń uogólnionych ma tylko jedną składową, a co za tym idzie istnieje tylko jeden rodzaj imperfekcji, któremu może podlegać taki element – a więc i jeden typ dystorsji wirtualnej. Również określenie odkształceniowej odpowiedzi konstrukcji polega na wyznaczeniu wektora uogólnionych odkształceń konstrukcji, którego każda składowa odpowiada jednemu jej elementowi.

W tym miejscu zwróćmy uwagę na bardzo ważne założenie, z którego za chwilę będziemy korzystać. Otóż przyjmujemy tzw. *założenie małych przemieszczeń*, którego konsekwencją jest to, że wszystkie wielkości typu pole przemieszczeń, odkształceń, naprężeń itd., można opisywać względem początkowej (tj. nieodkształconej) konfiguracji konstrukcji, co często w sposób opisowy określa się mianem *zasady "zesztywnienia"*. Małe przyrosty przemieszczeń (a więc również małe odkształcenia) oznaczają eliminację czynników nieliniowych (jako małych wyższego rzędu). Stosowanie zasady zesztywnienia pozwala więc na liniowe składanie tych wielkości, czyli na wykorzystywanie tzw. *zasady superpozycji*. Właśnie to skalowanie i sumowanie odpowiedzi konstrukcji uzyskanych dla

różnych jednostkowych stanów dystorsyjnych będzie, jak się okaże, jedną z głównych cech MDW. Przyjęte założenie liniowości stanowi natomiast jedno z podstawowych ograniczeń metody.

Rozpatrzmy teraz ponownie konstrukcję początkową (tzn. zanim poddaliśmy ją działaniu dystorsji wirtualnej), poddaną tym razem obciążeniu statycznemu siłą P (rys. 2.1(d)). W takiej *obciążonej* konstrukcji powstanie pole odkształceń $\overset{\mathrm{L}}{\varepsilon}_i$ $(i = 1, 2)$ i związane z nim pole sił wewnętrznych (tj. naprężeń uogólnionych) $\overset{\mathrm{L}}{N}_i = E_i A_i \overset{\mathrm{L}}{\varepsilon}_i$. Pola te stanowią *liniową* odpowiedź konstrukcji.

Superponując oba stany (tj. konstrukcji *sprężonej* i *obciążonej*) otrzymujemy tzw. konstrukcję **modelowaną dystorsjami** (rys. 2.1(e)). Odkształcenia i naprężenia uogólnione, które występują w takim ustroju określone są następującymi równaniami, w których ponownie wykorzystano macierz wpływu:

$$\varepsilon_i = \overset{\mathrm{L}}{\varepsilon}_i + \overset{\mathrm{R}}{\varepsilon}_i = \overset{\mathrm{L}}{\varepsilon}_i + \sum_j D_{ij}\,\hat{\varepsilon}_j, \tag{2.3}$$

$$\begin{aligned} N_i &= E_i A_i \left(\varepsilon_i - \hat{\varepsilon}_i\right) = E_i A_i \left(\overset{\mathrm{L}}{\varepsilon}_i + \overset{\mathrm{R}}{\varepsilon}_i - \hat{\varepsilon}_i\right) \\ &= \overbrace{E_i A_i \overset{\mathrm{L}}{\varepsilon}_i}^{\overset{\mathrm{L}}{N}_i} + \overbrace{E_i A_i \sum_j \left(D_{ij} - \delta_{ij}\right)\hat{\varepsilon}_j}^{\overset{\mathrm{R}}{N}_i} = \overset{\mathrm{L}}{N}_i + \overset{\mathrm{R}}{N}_i. \end{aligned} \tag{2.4}$$

Przypomnijmy, że składniki $\overset{\mathrm{L}}{\varepsilon}_i$, $\overset{\mathrm{L}}{N}_i$ to część odkształceń i naprężeń uogólnionych wynikająca z obciążenia statycznego konstrukcji, natomiast składniki $\overset{\mathrm{R}}{\varepsilon}_i$, $\overset{\mathrm{R}}{N}_i$ są spowodowane przez dystorsje.

Niezależnie od konstrukcji modelowanej dystorsjami, rozpatrzmy teraz ponownie konstrukcję *obciążoną*. W elemencie nr 1 wprowadźmy pewną modyfikację, rozumianą jako zmiana jednego z jego parametrów konstrukcyjnych, przykładowo – pola przekroju poprzecznego (rys. 2.1(f)), albo modułu Younga. Stan odkształceń i naprężeń uogólnionych w tej *zmodyfikowanej* konstrukcji poddanej obciążeniu siłą P będzie teraz inny niż w konstrukcji *obciążonej* o pierwotnych wartościach wszystkich parametrów konstrukcyjnych. Z kolei wymagamy teraz, że spełniony będzie następujący

> **postulat**: konstrukcja *modelowana dystorsjami* i konstrukcja *zmodyfikowana* są *identyczne* w sensie równości ich pól (uogólnionych) odkształceń i naprężeń.

Oznacza to, że wprowadzenie odpowiedniej dystorsji wirtualanej w pręcie nr 1 jest równoważne pewnej modyfikacji jego pola przekroju (lub modułu Younga). Aby wyjaśnić to dokładniej, weźmy pod uwagę szczególny przypadek, gdy $\hat{\varepsilon}_1 = \varepsilon_1$, co sprawia, że oznaczone na rys. 2.1(e) przemieszczenie $\hat{\varepsilon}_1 L$ powinno być równe przemieszczeniu $\varepsilon_1 L$ (zamieszczony schemat prezentuje oczywiście ogólny przypadek, gdy przemieszczenia te są różne). Przyjęta równość oznacza, że w elemencie nr 1 nie występują żadne naprężenia (dla $i = 1$, z równania (2.4) otrzymujemy bowiem, że $N_1 = 0$), zatem przy zadanym obciążeniu P można uznawać ten element za nieistniejący, co jest równoważne sytuacji, gdy modyfikujemy konstrukcję "zerując" pole przekroju tego elementu.

Przyjęto notację, w której A_i oznacza pierwotne wielkości pól przekrojów poprzecznych, natomiast $\hat{A}_i$ ich wartości zmodyfikowane. Zakładając brak oddziaływań pozastatycznych, siły przekrojowe w elementach konstrukcji zmodyfikowanej wynoszą

$$N_i = E_i \hat{A}_i \, \varepsilon_i, \tag{2.5}$$

podczas, gdy w konstrukcji modelowanej dystorsjami

$$N_i = E_i A_i \left(\varepsilon_i - \hat{\varepsilon}_i\right). \tag{2.6}$$

Zgodnie z postulowaną równością pól uogólnionych naprężeń, siły te muszą być w obu przypadkach takie same. Przyrównując zatem oba wyrażenia wyznaczamy wzór na modyfikację pola przekroju poprzecznego wyrażoną przez dystorsje wirtualne:

$$\mu_i \overset{\text{def}}{=} \frac{\hat{A}_i}{A_i} = \frac{\varepsilon_i - \hat{\varepsilon}_i}{\varepsilon_i}. \tag{2.7}$$

Zauważmy tutaj, że powyższy związek jest (wbrew pozorom) nieliniowy względem dystorsji $\hat{\varepsilon}_i$, gdyż zgodnie z równaniem (2.3) odkształcenia ε_i również zależą od $\hat{\varepsilon}_i$.

Zdefiniowana powyżej modyfikacja μ_i, opisuje zmianę pola przekroju elementu i-tego. Łatwo jest zauważyć, że tę samą wielkość możemy zdefiniować inaczej, jako modyfikację modułu Younga: $\mu_i \overset{\text{def}}{=} \hat{E}_i / E_i$, czy też ogólnie jako modyfikację sztywności podłużnej:

$$\mu_i \overset{\text{def}}{=} \frac{\hat{k}^{(i)}_{EA}}{k^{(i)}_{EA}}, \tag{2.8}$$

przy czym w każdym przypadku zależność pomiędzy modyfikacją, a dystorsją wirtualną jest identyczna z przedstawioną w równaniu (2.7). Sposób wyznaczenia tej formuły pokazuje, że tak naprawdę istotą parametru μ_i jest określenie *modyfikacji sztywności* elementu. Zatem w ogólnym przypadku wektor $\boldsymbol{\mu} = \left[\mu_i\right]$ nazwiemy **wektorem modyfikacji sztywności** konstrukcji, przyjmując definicję jego składowych w postaci (2.8). Nieco bardziej ogólne podejście, wprowadzające pojęcie **wektora modyfikacji parametrów konstrukcyjnych** (mających określony wpływ na modyfikacje sztywności konstrukcji), zostanie przedstawione w dalszej części pracy.

Wyrażenie (2.7) przedstawmy w postaci odwrotnej

$$\hat{\varepsilon}_i = (1 - \mu_i)\varepsilon_i, \quad \text{przy czym} \quad \varepsilon_i = \varepsilon_i(\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}), \quad \hat{\boldsymbol{\varepsilon}} = \left[\hat{\varepsilon}_i\right]. \tag{2.9}$$

Jak widać, z racji na występowanie dystorsji również po prawej stronie powyższego równania, nie stanowi ono prostej formuły na obliczenie dystorsji modelującej zmianę sztywności konstrukcyjnej. W dalszej części pracy pokażemy jednak, jak znając modyfikacje sztywnościowe μ_i, możemy obliczyć dystorsje wirtualne *modelujące* ich wpływ na pierwotną (tj. niezmodyfikowaną) konstrukcję – odpowiednie równania oraz algorytm zostaną zaprezentowane w rozdziale 4. Podkreślmy, że zaprezentowane podejście dostarcza dystorsji wirtualnych, które można wykorzystywać do modelowania takich zmian w konstrukcji, które w określony sposób wpływają na jej parametry sztywnościowe.

2.3. Macierz wpływu

Wprowadzona w poprzednim podrozdziale macierz wpływu stanowi główny fundament Metody Dystorsji Wirtualnych. Wszystkie algorytmy numeryczne oparte na przedstawionym podejściu dystorsyjnym korzystają ze zmagazynowanej macierzy wpływu pewnych "zaburzeń" lokalnych (istotnych w danym zagadnieniu) na globalne zachowanie się konstrukcji. Zatem niejako wstępem dla tych algorytmów musi być procedura obliczania i magazynowania tej macierzy.

2.3.1. Odkształceniowa macierz wpływu oraz pojęcie lokalizacji dystorsyjnej

Wspomnieliśmy już, że składnik D_{ij} macierzy wpływu to odkształcenie i-tego elementu powstałe w wyniku wprowadzenia wirtualnego stanu jednostkowej, wstępnej deformacji elementu j-tego. Definicja ta jest właściwa dla tzw. **odkształceniowej macierzy wpływu**, a przy tym jest w pełni poprawna tylko w przypadku konstrukcji kratownicowych, w których odkształcenie elementu (a zatem również jego wstępna deformacja) opisana jest przy pomocy jednej wielkości. W przypadku innych, mniej trywialnych elementów skończonych, których wektory odkształceń uogólnionych mają więcej niż jedną składową, należy raczej mówić o i-tej składowej globalnego wektora odkształceń konstrukcji (opisującej składową deformacji pewnego elementu tej konstrukcji) na skutek j-tej dystorsji jednostkowej (imperfekcji określonego typu) wywołanej w jakimś elemencie. Można zatem mówić o pewnych lokalizacjach dystorsji czy też stanów odkształcenia w konstrukcji dyskretnej. Posługiwać się więc często będziemy pojęciem **lokalizacji dystorsyjnej**, która musi być zgodna z określonym stanem deformacji elementu skończonego konstrukcji[2)]. Zbiór lokalizacji dystorsyjnych oznaczać będziemy symbolem $\mathcal{D}$. Przyjmijmy również, że w dalszej części pracy symbole i, j wykorzystywać będziemy zazwyczaj do indeksowania dystorsji oraz stanów odkształceń (i związanych z nimi parametrów sztywności elementów skończonych) w lokalizacjach dystorsyjnych.

Łatwo zauważyć, że odkształceniowa macierz wpływu[3)], $\mathbf{D} = \left[D_{ij}\right]$, jest macierzą kwadratową o elementach na przekątnej zawierających się w przedziale $(0\,,\,1\rangle$ (wyjątkowo może tak nie być w przypadku występowania stanów *rzeczywistego* wstępnego sprężenia), przy czym są one równe 1, wtedy i tylko wtedy, gdy (przynajmniej lokalnie) występuje statyczna wyznaczalność. Konsekwencją tego jest również to, że w odpowiadającej takiemu składnikowi kolumnie macierzy wpływu wszystkie pozostałe składowe są zerowe. Zatem można napisać, że $D_{ij} = \delta_{ij}$ dla tych kolumn, które odpowiadają lokalizacjom dystorsyjnym $j \in \mathcal{D}$, w których występuje statyczna wyznaczalność.

Macierz $\mathbf{D}$ stanowi niezbędny fundament dla wszelkich algorytmów MDW. Jest tak dlatego, że macierz ta (co dokładnie ujawni się w dalszej części pracy) służy do wyznacza-

2) Konkretne przykłady elementarnych stanów deformacji, a co za tym idzie również lokalizacji dystorsyjych zostaną przedstawione w następnym rozdziale dla przypadku elementu skończonego ramy płaskiej.

3) W niniejszej pracy stwierdzenie *macierz wpływu* zwykle oznaczać będzie – o ile nie zaznaczono inaczej – *odkształceniową* macierz wpływu określającą wpływ kolejnych dystorsji jednostkowych na odkształcenia całkowite w lokalizacjach dystorsyjnych.

nia wartości dystorsji wirtualnych, które modelują pewne oddziaływania o nieliniowym charakterze (jak np. zmiana sztywności elementów konstrukcji, wynikła z modyfikacji pewnych parametrów strukturalnych). Algorytm obliczania dystorsji wirtualnych zostanie dokładnie przedstawiony w rozdziale 4. W następnym paragrafie natomiast pokażemy, że przydatne może być uogólnienie pojęcia macierzy wpływu.

2.3.2. Ogólna macierz wpływu oraz funkcja odpowiedzi

Stwierdziliśmy, że podstawowe przeznaczenie odkształceniowej macierzy wpływu związane jest z wyznaczeniem dystorsji wirtualnych. Pokazaliśmy jednak również, że kiedy te dystorsje są już znane, to dzięki odpowiedniej superpozycji stanów zapisanych w macierzy wpływu można obliczyć całkowite (tj. aktualne) odkształcenia uogólnione we wszystkich lokalizacjach dystorsyjnych $\mathcal{D}$. W tym celu (patrz wzór (2.3)) potrzebna jest również odkształceniowa odpowiedź liniowa[4)] w tych lokalizacjach, $\overset{L}{\varepsilon}_i$ $(i \in \mathcal{D})$, która jednak, jak się okaże, również niezbędna jest do obliczania dystorsji. O ile więc interesują nas tylko odkształcenia w lokalizacjach $\mathcal{D}$ to zmagazynowana macierz wpływu pozwala nam na uaktualnianie ich bez odwoływania się do numerycznego modelu konstrukcji. Stosując wzór (2.4) można ją również wykorzystać do obliczenia aktualnego stanu uogólnionych naprężeń w tych lokalizacjach.

W praktyce jednak zwykle interesują nas inne wielkości niż tylko odkształcenia (i naprężenia) w miejscach, w których dopuszczamy modyfikację ustroju. Dla wielu zagadnień istotne mogą być na przykład przemieszczenia w pewnych miejscach konstrukcji – chcemy badać jak ulegają one zmianie na skutek wprowadzanych w konstrukcji modyfikacji, będących wynikiem przeprojektowywania, powstania defektu czy stref uplastycznienia. Wiemy już jak wirtualnie modelować te modyfikacje, chcielibyśmy natomiast móc szybko uwzględniać ich wpływ na interesujące nas parametry. Oczywiście wpływ ten można wyznaczyć nakładając obliczone dystorsje wirtualne na analizowaną konstrukcję[5)], a następnie rozwiązując jej układ równań równowagi. Można jednak zastosować inne podejście, w którym znów wykorzystamy zasadę superpozycji. Otóż zwykle już na wstępie potrafimy ocenić jakie wielkości będą nas interesowały – możemy zatem obliczyć jak ulegają one zmianie na skutek wprowadzenia jednostkowych dystorsji wirtualnych zadawanych w kolejnych lokalizacjach dystorsyjnych (lokalizacje te powinny oczywiście pokrywać się z miejscami, w których występuje możliwość modyfikacji). W ten sposób otrzymamy tzw. **ogólną macierz wpływu**, $\breve{\mathbf{D}} = \left[\breve{D}_{\alpha i}\right]$, Nazwa ta uwidacznia zarazem to, iż macierz ta (zwłaszcza w aspekcie jej obliczania) jest *uogólnieniem* macierzy odkształceniowej oraz to, że służyć będzie do ogólniejszych celów niż wyznaczenie dystorsji. Można by również dla niej zaproponować alternatywną nazwę: **macierz odpowiedzi**. Nie zapominajmy jednak, że może być ona wykorzystana tylko wtedy, gdy znamy już dystorsje, do obliczenia których niezbędna jest odkształceniowa macierz wpływu. Zwróćmy rownież tutaj uwagę na zaproponowany sposób indeksowania elementów ogólnej macierzy wpływu: $\breve{D}_{\alpha i}$.

[4)] Przypomnijmy, że jest to odpowiedź konstrukcji pierwotnej na ustalone obciążenie statyczne.

[5)] Wpływ ten realizuje się w modelu MES za pomocą odpowiednich obciążeń węzłowych (patrz paragraf 2.3.4).

Chodzi tutaj głównie o dobór symboli w celu rozróżnienia obu indeksów. Drugi indeks wykazuje związek z lokalizacjami dystorsyjnymi – jest tak, gdyż i-ta kolumna macierzy $\breve{\mathbf{D}}$, obliczana jest dla jednostkowej dystorsji zadanej w i-tej lokalizacji dystorsyjnej ($i \in \mathcal{D}$). Natomiast pierwszy indeks tej cechy nie posiada (indeksuje on po prostu wielkości zdefiniowane jako istotne dla danego zagadnienia).

Rodzaj odpowiedzi zapisanej w ogólnej macierz wpływu jest dosyć dowolny i zależy w głównej mierze od tego w jaki sposób definiujemy interesujące nas parametry. Mogą to oczywiście być zarazem odkształcenia, naprężenia, uogólnione przemieszczenia węzłów, czy też nawet – mówiąc ogólniej – określonych punktów konstrukcji; mogą to również być kombinacje liniowe wymienionych wielkości. Jedynym wymaganiem jest bowiem tylko *liniowa zależność* od dystorsji, a co za tym idzie od obciążenia (patrz dalej: paragraf 2.3.4), a więc w istocie od przemieszczeń węzłów. W tym kontekście wprowadźmy przydatne dalej pojęcie **funkcji odpowiedzi**, f_α, zdefiniowanej właśnie jako dowolna, liniowa odpowiedź ustroju. W praktyce wygodnie jest mówić, że jest to dowolna liniowa funkcja przemieszczeń węzłowych konstrukcji, gdyż wielkości te stanowią bezpośredni wynik obliczeń MES. Oczywiście, konsekwentnie oznacza to również, na przykład, liniową zależność od obciążenia.

Wykorzystując pojęcie funkcji odpowiedzi możemy napisać następujący wzór na element ogólnej macierzy wpływu:

$$\breve{D}_{\alpha i} = \{f_\alpha \text{ obliczone dla } \hat{\varepsilon}_i = 1\} \qquad (i \in \mathcal{D}). \tag{2.10}$$

Analogicznie element odkształceniowej macierzy wpływu zdefiniowaliśmy jako

$$D_{ij} = \{\varepsilon_i \text{ obliczone dla } \hat{\varepsilon}_j = 1\} \qquad (i, j \in \mathcal{D}), \tag{2.11}$$

przy czym zauważmy, że odkształcenie uogólnione ε_i jest szczególnym przypadkiem funkcji odpowiedzi – spełnia bowiem kryterium liniowości, gdyż przyjmujemy fundamentalne założenie liniowej zależności odkształceń od przemieszczeń (małe przemieszczenia, liniowość geometryczna).

W niniejszej pracy posługiwać się również będziemy pojęciem **wektora funkcji odpowiedzi**, $\mathbf{f} = \left[f_\alpha\right]$, którego składowymi są wartości obliczane przy wykorzystaniu funkcji odpowiedzi (w tym kontekście można mówić również o **wektorowej funkcji odpowiedzi**). Mając zmagazynowaną odpowiednią ogólną macierz wpływu oraz znając dystorsje modelujące zmiany w ustroju, możemy szybko obliczać aktualne wartości tych składowych według wzoru:

$$f_\alpha = \overset{\text{L}}{f}_\alpha + \overset{\text{R}}{f}_\alpha, \tag{2.12}$$

gdzie:

$$\overset{\text{L}}{f}_\alpha = \{f_\alpha \text{ obliczone dla } \mathbf{Q}\}, \qquad \overset{\text{R}}{f}_\alpha = \sum_{i \in \mathcal{D}} \breve{D}_{\alpha i}\, \hat{\varepsilon}_i, \tag{2.13}$$

czyli wyróżniamy czynnik liniowy, zależny od ustalonego obciążenia $\mathbf{Q}$, oraz czynnik rezydualny będący wynikiem modyfikacji modelowanych przez dystorsje wirtualne. Zauważmy, że składowa $\overset{\text{L}}{f}_\alpha$ spełnia tę samą rolę co $\overset{\text{L}}{\varepsilon}_i$ we wzorze (2.3).

Pominąwszy bardzo szczególne przypadki, macierz wpływu nie jest macierzą symetryczną, a macierz ogólna $\check{\mathbf{D}}$ zwykle nie będzie nawet kwadratowa. Jej wymiar zależy od ilości dystorsji (określającej liczbę kolumn macierzy) oraz od liczby parametrów, które chcemy bądź musimy uwzględnić. Oczywistym jest, że w rozwiązaniach konkretnych problemów, wykorzystujących macierz wpływu, powinno dążyć się (o ile jest to możliwe) do ograniczenia jej rozmiaru. Łatwo bowiem zauważyć, że na przykład w przypadku konstrukcji kratowej składającej się z n elementów, przy założeniu, że modyfikacja może dotyczyć każdego z nich, liczba kolumn ogólnej macierzy wpływu będzie równa n, natomiast pełna, odkształceniowa macierz wpływu – tzn. grupująca wpływ kolejnych dystorsji elementarnych na odkształcenia wszystkich prętów konstrukcji – będzie miała wymiar $n \times n$.

2.3.3. Podstawowe definicje

Zanim przedstawimy ogólny przepis na obliczanie macierzy wpływu podajmy listę użytecznych definicji, prowadzących do sformułowania tego algorytmu – są to kolejno:

funkcja odpowiedzi – dowolna funkcja liniowo zależna od przemieszczeń węzłowych konstrukcji dyskretnej;

dystorsja wirtualna – odkształcenie wstępne elementu konstrukcji (oddziaływanie pozastatyczne analogiczne do imperfekcji geometrycznej lub obciążenia termicznego);

dystorsja jednostkowa – dystorsja wirtualna powodująca jednostkowe odkształcenie swobodnego elementu konstrukcji;

obciążenie kompensacyjne – samorównoważne obciążenie realizujące w elemencie stan odpowiedniej dystorsji jednostkowej (a w ogólnym przypadku – dowolnej), a więc wywołujące pewne wstępne odkształcenie – jednostkowe w przypadku elementu swobodnego (lub statycznie wyznaczalnego);

wektor wpływu – określa odkształcenia (lub inną liniową odpowiedź konstrukcji) na skutek przyłożenia jednostkowej dystorsji wirtualnej;

macierz wpływu – grupuje wektory wpływu otrzymane dla poszczególnych dystorsji jednostkowych.

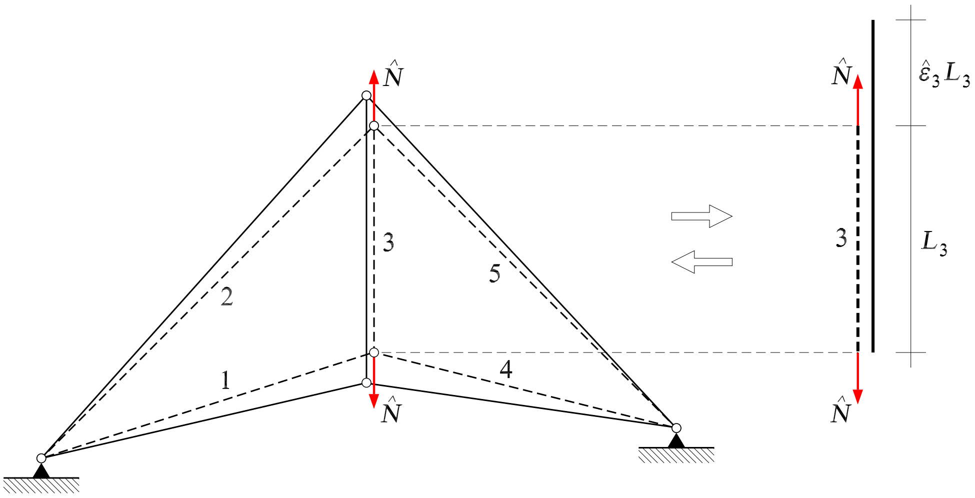
Pośród wymienionych powyżej pojęć pojawiają się dwa nowe. Pojęcie *wektora wpływu* wprowadzono głównie dla wygody – stanowi on po prostu pojedynczą kolumnę macierzy wpływu. Zauważmy również, iż jest to pewien przypadek wektora funkcji odpowiedzi. Bardziej istotną natomiast, i wymagającą dokładniejszego wyjaśnienia jest definicja *obciążenia kompensacyjnego*.

2.3.4. Obciążenie kompensacyjne

Jak wiadomo w Metodzie Elementów Skończonych (stanowiącej fundament dla MDW) niewiadomymi są przemieszczenia węzłów konstrukcji, natomiast wektor prawej strony podstawowego równania MES dla statyki stanowią statyczne obciążenia węzłowe. Wielkości pozastatyczne (takie jak, np.: obciążenia termiczne, odkształcenia wstępne, dystorsje)

muszą więc być zamienione na ekwiwalentne im obciążenia statyczne. Zatem **obciążenie kompensacyjne** adekwatne dla danej dystorsji wirtualnej to po prostu odpowiedni układ (uogólnionych) sił węzłowych *kompensujący* niejako jej wpływ na konstrukcję.

W celu obliczenia odpowiedniego wektora wpływu dystorsja jest z reguły nakładana na pojedynczy element konstrukcji, stąd obciążenie kompensacyjne również będzie układem sił działających tylko na węzły określonego elementu. Obciążenie to musi realizować stan odpowiedniego jednostkowego odkształcenia elementu *swobodnego* (tj. np. "myślowo wyjętego" z konstrukcji, rys. 2.2), skąd wnioskujemy, iż musi to być układ sił *samorównoważących się*. Oczywiście element taki stanowi w rzeczywistości integralną część konstrukcji i – o ile nie mamy do czynienia z lokalną statyczną wyznaczalnością – w wyniku przyłożenia obciążenia kompensacyjnego, w całej konstrukcji powstaną pola wstępnych odkształceń i naprężeń, a finalne odkształcenie elementu z dystorsją nie będzie już jednostkowe. Jak widać konkretne obciążenie kompensacyjne zależeć będzie przede wszystkim od rodzaju elementu (liczby jego węzłów, rodzaju uogólnionych sił węzłowych itp.), ale również od typu dystorsji, którą chcemy w nim zrealizować.



Rys. 2.2. Wpływ dystorsji przyłożonej w jednym z elemenetów oraz obciążenie kompensacyjne ją realizujące. Dla $\hat{N} = E_3 A_3$ otrzymamy dystorsję jednostkową $\hat{\varepsilon}_3 = 1$.

W przypadku elementu kratowego mamy do czynienia tylko z jednym typem dystorsji wirtualnej – jest nią wstępne wydłużenie pręta. Obciążeniem kompensacyjnym jest tu samorównoważąca się para sił rozciągających pręt (rys. 2.2) – siły przyłożone są osiowo do przeciwległych końców pręta, natomiast wartość każdej z nich jest równa sztywności podłużnej pręta. Oznacza to, że taki "oswobodzony" pręt doznałby dwukrotnego[6)] rozciągnięcia – przyłożone siły realizują więc w elemencie stan wstępnego odkształcenia

[6)]Fakt ten nie koliduje w żaden sposób z przyjętym założeniem małych przemieszczeń. Dystorsja jednostkowa wymagająca aż *jednostkowego* wstępnego odkształcenia elementu jest tylko pewnym stanem wirtualnie nakładanym na konstrukcję w celu otrzymania *unormowanej* odpowiedzi, którą zapisujemy w macierzy wpływu. Odpowiedź ta jest wykorzystywana do modelowania dystorsjami (przynajmniej potencjalnie rzeczywistych) zmian pewnych parametrów konstrukcyjnych – jest ona przeskalowywana przez te dystorsje do wielkości, które powinny spełniać ograniczenie małych przemieszczeń.

jednostkowego. Na rys. 2.2 przedstawiono prostą konstrukcję kratową, w której wprowadzono dystorsję w jednym z elementów przy pomocy kompensacyjnej pary sił $\hat{N}$. Przyjmując, że $\hat{N} = E_3 A_3$ zrealizujemy w elemencie nr 3 stan dystorsji jednostkowej: $\hat{\varepsilon}_3 = 1$, zaś wyznaczone wtedy odkształcenia wszystkich prętów kratownicy stanowić mogą 3-cią kolumnę odkształceniowej macierzy wpływu.

2.3.5. Algorytm wyznaczania macierzy wpływu

Poniżej prezentujemy ogólny algorytm obliczania macierzy wpływu. Dotyczy on konstrukcji składającej się właściwie z dowolnych elementów skończonych. Od rodzaju elementu skończonego zależeć będzie liczba i typ możliwych do nałożenia na niego dystorsji jednostkowych, a zatem również i sposób realizacji odpowiedniego obciążenia kompensacyjnego. Efektywność algorytmu wymaga, aby (oprócz standardowych procedur typu przygotowanie miejsca w pamięci komputera dla obliczanej macierzy wpływu itp.) wykonana na wstępie została dekompozycja symetrycznej macierzy sztywności konstrukcji: $\mathbf{K} = \mathbf{L}\,\mathbf{L}^{\mathrm{T}}$, czyli wymaga wyznaczenia dolnotrójkątnej macierzy $\mathbf{L}$ (tzw. *rozkład Banachiewicza–Cholesky'ego* macierzy symetrycznej). Następnie dla każdej obliczanej kolumny macierzy wpływu należy kolejno postępować według następujących punktów:

- Wyznaczamy wektor statycznego obciążenia kompensacyjnego $\hat{\mathbf{Q}}^{(e)}$ ekwiwalentnego nałożeniu na element e określonej dystorsji jednostkowej j.
- Dokonujemy transformacji obciążenia $\hat{\mathbf{Q}}^{(e)}$, konstruując *globalny* wektor kompensacyjnego obciążenia statycznego $\hat{\mathbf{Q}}$ adekwatny nałożeniu na konstrukcję dystorsji jednostkowej j.
- Rozwiązujemy układ równań równowagi statycznej konstrukcji $\mathbf{K}\,\mathbf{q} = \hat{\mathbf{Q}}$, przy zadanym obciążeniu kompensacyjnym. Do rozwiązania układu wykorzystujemy macierz $\mathbf{L}$, uzyskaną z dekompozycji macierzy $\mathbf{K}$. Otrzymujemy wektor uogólnionych przemieszczeń $\mathbf{q}$ wywołanych przyjętym stanem dystorsji jednostkowej.
- Wektor przemieszczeń $\mathbf{q}$ stanowi pełną kolumnę *przemieszczeniowej* macierzy wpływu – w praktyce w wielu zagadnieniach często istotne są tylko niektóre z przemieszczeń i tylko te magazynujemy (będzie to specyficzna *ogólna* macierz wpływu). Generalnie jednak wektor $\mathbf{q}$ wykorzystujemy do obliczenia wektora funkcji odpowiedzi czyli istotnych dla danego zagadnienia wielkości, których wpływ można później skalować i superponować. W przypadku *ogólnej macierzy wpływu* magazynujemy więc dowolnie przez nas określone liniowe kombinacje obliczonych przemieszczeń węzłowych. Z kolei wektor wpływu fundamentalnej dla wyznaczania dystorsji macierzy *odkształceniowej* dostaniemy, obliczając interesujące nas odkształcenia elementów konstrukcji. W tym celu kolejno dla każdego interesującego nas elementu skończonego e określamy wektor *lokalnych* węzłowych przemieszczeń uogólnionych $\mathbf{q}^{(e)}$, który następnie wykorzystujemy do wyznaczenia wielkości opisujących odkształcenie tego elementu. Liczba tych wielkości zależeć będzie od typu elementu skończonego.

Całą procedurę powtarzamy dla kolejnych stanów dystorsji jednostkowych. Należy przy tym jeszcze raz podkreślić, iż dysponujemy *zdekomponowaną* (jednorazowo, na początku

algorytmu) macierzą sztywności konstrukcji **K**, co znacznie obniża koszty numeryczne, natomiast istota postępowania sprowadza się do wyznaczenia kompensacyjnego wektora prawej strony statycznego równania równowagi oraz przekształceń bazujących na otrzymanym wektorze uogólnionych przemieszczeń węzłów konstrukcji.

Przedstawiona procedura pozwala wyznaczyć macierz wpływu wykorzystywaną w klasycznej Metodzie Dystorsji Wirtualnych, odpowiednią dla zagadnień statyki konstrukcji. Można więc tutaj mówić o **statycznej macierzy wpływu**. Macierz tą starano się również wykorzystywać w pewnych problemach dynamiki konstrukcji, gdzie musiała ona być obliczana dla każdego kroku czasowego. Pojęcie i algorytm wyznaczania **dynamicznej macierzy wpływu**, czy też raczej tzw. **impulsowej macierzy wpływu**, pozwalającej na konsekwentne wykorzystanie idei dystorsji wirtualnych w zagadnieniach dynamiki małych drgań, zaprezentowane zostaną w dalszej części pracy.

2.3.6. Przykładowe macierze wpływu dla kratownic

Poniżej zamieszczono dwa proste przykłady wyznaczania macierzy wpływu dla dwu- oraz trój-elementowej kratownicy. Przykłady podają analityczne wyrażenia na macierze wpływu w zależności od cech ich elementów. Oczywiście w praktycznych przypadkach wszystkie obliczenia są przeprowadzane numerycznie według przedstawionej powyżej procedury z wykorzystaniem algorytmów Metody Elementów Skończonych.

Przykład 2.1: Wyznaczymy macierz wpływu dla rozpatrywanej uprzednio kratownicy składającej się z dwóch elementów (rys. 2.1(a)). Przyjmując pola przekrojów poprzecznych oraz moduły Younga dla prętów jako (odpowiednio): A_1, A_2 oraz E_1, E_2, łatwo możemy wyznaczyć siły osiowe w elementach dla konstrukcji obciążonej w przesuwnym węźle siłą P (rys. 2.1(d)):

$$N_1 = \frac{E_1 A_1}{E_1 A_1 + E_2 A_2} P, \qquad N_2 = \frac{E_2 A_2}{E_1 A_1 + E_2 A_2} P, \tag{2.14}$$

a następnie odkształcenia podłużne – w przypadku tej konstrukcji identyczne dla obu prętów:

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \frac{P}{E_1 A_1 + E_2 A_2}. \tag{2.15}$$

Powyższe wyrażenie na odkształcenia tak obciążonej kratownicy pozwala nam określić wszystkie składowe macierzy wpływu. Zauważmy bowiem, że nałożenie pary sił kompensacyjnych P_j na j-ty element tej konstrukcji ($j = 1, 2$) jest równoważne przypadkowi obciążenia jej siłą $P = P_j$ jak na rys. 2.1(d). Wprowadzenie stanu dystorsji jednostkowej w j-tym pęcie kratownicy oznacza, że wartość każdej z sił kompensacyjnych równa się sztywności podłużnej tego pręta. Podstawiając zatem $P = P_j = E_j A_j$ do równań (2.15) otrzymujemy wzór na (w tym przypadku sobie równe) obie składowe j-tej kolumny macierzy wpływu:

$$D_{1j} = D_{2j} = \frac{E_j A_j}{E_1 A_1 + E_2 A_2}, \qquad (j = 1, 2). \tag{2.16}$$

Cała macierz wpływu ma więc postać:

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} \dfrac{E_1A_1}{E_1A_1+E_2A_2} & \dfrac{E_2A_2}{E_1A_1+E_2A_2} \\ \dfrac{E_1A_1}{E_1A_1+E_2A_2} & \dfrac{E_2A_2}{E_1A_1+E_2A_2} \end{bmatrix}. \tag{2.17}$$

Jak widać (w ogólności) nie jest to macierz symetryczna.

W szczególnym przypadku, gdy oba pręty kraty są wykonane z materiałów o takich samych własnościach sprężystych (tj. gdy $E_1 = E_2$), macierz wpływu upraszcza się do postaci zależnej tylko od pól przekrojów poprzecznych:

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} \dfrac{A_1}{A_1+A_2} & \dfrac{A_2}{A_1+A_2} \\ \dfrac{A_1}{A_1+A_2} & \dfrac{A_2}{A_1+A_2} \end{bmatrix}. \tag{2.18}$$

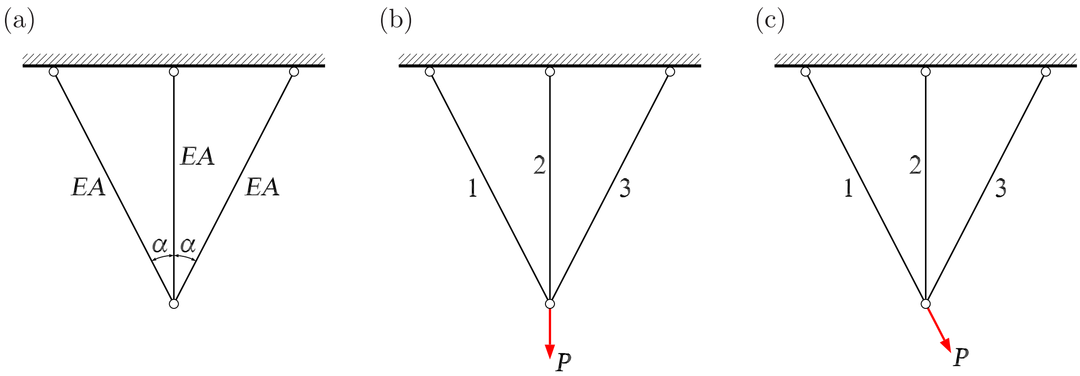
Analogiczy wzór otrzymamy dla przypadku identycznych pól przekrojów ($A_1 = A_2$), przy dowolnych modułach sprężystości materiałów, z których wykonane są pręty. Wystarczy tylko w wyrażeniu (2.18) podstawić E_i zamiast A_i ($i = 1, 2$). Z kolei dla obu prętów o takich samych cechach sztywnościowych (tj. $k_{EA}^{(1)} = k_{EA}^{(2)}$) wszystkie składowe macierzy wpływu są równe $1/2$.

Wykorzystując wzór (2.16), łatwo można pokazać sensowny przykład ogólnej macierzy wpływu $\check{\mathbf{D}}$. Wyobraźmy sobie sytuację, w której istotnym parametrem jest pionowe przemieszczenie swobodnego węzła kratownicy. Zatem ogólna macierz wpływu, w której postanowiliśmy zapisać wpływ dystorsji jednostkowych na to przemieszczenie jest równa

$$\check{\mathbf{D}} = \begin{bmatrix} \dfrac{E_1A_1L}{E_1A_1+E_2A_2} & \dfrac{E_2A_2L}{E_1A_1+E_2A_2} \end{bmatrix}. \tag{2.19}$$

Przykład 2.2: Rysunek 2.3(a) przedstawia kratownicę o trzech prętach sprężystych. Dla uproszczenia przyjmujemy, że sztywności wszystkich elementów kratownicy są takie same, tzn.:

$$k_{EA}^{(1)} = k_{EA}^{(2)} = k_{EA}^{(3)} = EA. \tag{2.20}$$



Rys. 2.3. Trójelementowa kratownica sprężysta.

Dla obciążenia siłą P przyłożoną jak na rys. 2.3(b) otrzymujemy następujące równania na siły osiowe:

$$N_1 = N_3 = \frac{\cos^2(\alpha)}{1 + 2\cos^3(\alpha)} P, \qquad N_2 = \frac{1}{1 + 2\cos^3(\alpha)} P. \tag{2.21}$$

Wzory te wykorzystamy do obliczenia odpowiedzi sprężystej (tj. odkształceń) konstrukcji dla dystorsji jednostkowej nałożonej na element środkowy.

Dla obciążenia przyłożonego jak na rys. 2.3(c) siły osiowe w prętach są następujące:

$$N_1 = \frac{1 + 4\cos^3(\alpha)}{2 + 4\cos^3(\alpha)} P, \qquad N_2 = \frac{\cos(\alpha)}{1 + 2\cos^3(\alpha)} P, \qquad N_3 = -\frac{1}{2 + 4\cos^3(\alpha)} P. \tag{2.22}$$

Ze względu na symetrię prętów 1 i 3, analogiczne wyrażenia otrzymamy dla obciążenia P przyłożonego w tym samym węźle, ale o kierunku wzdłuż osi elementu nr 3. Równania te posłużą określeniu odkształceń wywołanych dystorsjami w prętach ukośnych.

Efekt dystorsji jednostkowej zadanej w środkowym pręcie kraty uzyskamy przykładając do jego końców parę sił osiowych o wartościach $k_{EA}^{(2)}$. Jest to równoważne obciążeniu konstrukcji siłą $P = k_{EA}^{(2)}$ zgodnie z rys. 2.3(b). Analogicznie, jednostkową dystorsję w elemencie nr 1 realizuje obciążenie $P = k_{EA}^{(1)}$ przyłożone jak na rys. 2.3(c). Zauważmy, że ze względu na równość sztywności podłużnych (2.20), w każdym z przypadków faktycznie przyjmujemy wartość $P = EA$. Odpowiedź sprężystą konstrukcji otrzymamy obliczając odkształcenia sprężyste w każdym z elementów:

$$\varepsilon_i = \frac{N_i}{k_{EA}^{(i)}} = \frac{N_i}{EA}, \qquad (i = 1, 2, 3). \tag{2.23}$$

Składowe pierwszej kolumny macierzy wpływu są równe $D_{1i} = \varepsilon_i$, gdzie ε_i stanowią odkształcenia obliczone dla dystorsji jednostkowej zadanej w elemencie nr 1, tj. dla obciążenia $P = EA$ przyłożonego jak na rys. 2.3(c). Składowe kolumny środkowej wynoszą $D_{2i} = \varepsilon_i$, gdzie odkształcenia ε_i obliczono dla dystorsji jednostkowej zadanej w elemencie nr 2, tj. dla obciążenia $P = EA$ przyłożonego jak na rys. 2.3(b). Ostatnią kolumnę wyznaczamy analogicznie jak pierwszą (dzięki symetrii strukturalnej prętów nr 1 i 2). W ten sposób, wykorzystując równania (2.21), (2.22) oraz (2.23), wyznaczamy pełną, odkształceniową macierz wpływu dla kratownicy:

$$\mathbf{D} = \frac{1}{2 + 4\cos^3(\alpha)} \begin{bmatrix} 1 + 4\cos^3(\alpha) & 2\cos^2(\alpha) & -1 \\ 2\cos(\alpha) & 2 & 2\cos(\alpha) \\ -1 & 2\cos^2(\alpha) & 1 + 4\cos^3(\alpha) \end{bmatrix}. \tag{2.24}$$

Jak widać nie jest to macierz symetryczna. Łatwo można również oszacować, że (przy spełnieniu przyjętego założenia $\alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$) elementy na przekątnej wynoszą: $D_{11} = D_{33} \in \left(\frac{1}{2}, \frac{5}{6}\right)$, $D_{22} \in \left(\frac{1}{3}, 1\right)$, a więc zawsze są dodatnie i nie większe niż 1.

2.3.7. Podsumowanie: cechy i przeznaczenie macierzy wpływu

Stanowiąca fundament MDW odkształceniowa macierz wpływu charakteryzuje się następującymi właściwościami:

- jest macierzą kwadratową,
- ma na diagonali składniki dodatnie, ale nie większe od jedności, tzn.: $0 < D_{ii} \leqslant 1$ (poza diagonalą składowe mogą przyjmować wartości dowolne),
- jest niezbędna dla obliczenia dystorsji wirtualnych modelujących pewne oddziaływania o charakterze nieliniowym.

Macierz ta jest szczególnym przypadkiem ogólnej macierzy wpływu (macierzy odpowiedzi), która – w ogólności – nie posiada powyższych cech. Ogólna macierz wpływu pozwala na szybkie uwzględnienie wpływu modyfikacji modelowanych przez dystorsje wirtualne na istotne w danym zagadnieniu parametry, bez odwoływania się przy tym do numerycznego modelu konstrukcji. Może to w istotny sposób pomóc w stosowaniu MDW, której istota polega na możliwości wielokrotnego, *wirtualnego* modyfikowania konstrukcji – modyfikowania zautomatyzowanego, tzn. pod kontrolą algorytmów sterujących.

2.4. Zastosowania MDW w zagadnieniach statyki oraz jej zalety i ograniczenia

2.4.1. Zastosowania

Metoda Dystorsji Wirtualnych znalazła zastosowanie w następujących zagadnieniach statycznych:

- opis stanów sprężeń w jedno- i wielofazowych ustrojach sprężystych [10, 11, 12],
- optymalne przeprojektowywanie (*remodelling*) ustrojów sprężystych (polegające na przenoszeniu części materiału z jednego miejsca konstrukcji w inne), w szczególności projektowanie optymalnej topologii konstrukcji kratowych [15, 16, 14, 20, 36, 37, 35] oraz ramowych [40, 21, 46],
- modelowanie wzmocnienia i osłabienia materiału [35],
- opis (odcinakmi liniowo modelowanych) nieliniowości fizycznych typu *locking materials* lub ustrojów z luzami wewnętrznymi [10],
- analiza wrażliwości pól naprężeń, odkształceń i przemieszczeń na modyfikację parametrów projektowych (np. pola przekroju elementu) [35],
- modelowanie rys i pęknięć oraz ich postępującego rozwoju (budowle historyczne) [50, 51, 52],
- analiza niezawodności i postępującego zniszczenia (wieże wiertnicze) [49],
- modelowanie zachowania elementów aktywnych w ustrojach sterowalnych (tzw. *smart structures*) [24, 22, 17, 19, 26, 15, 16, 21],
- modelowanie i analiza sieci wodnych, dzięki zastosowaniu idei i algorytmów MDW (adaptacja dla równań przepływu cieczy) [23].

2.4.2. Zalety

Podstawowymi zaletami MDW są:

- względna prostota,
- efektywne wykorzystanie pierwotnego modelu ustroju (dokonywane są tylko modyfikacje *wirtualne*),
- beziteracyjne rozwiązywanie pewnych zagadnień, które przy użyciu klasycznych metod wymagają stosowania iteracji,
- możliwość wykorzystania opracowanej metodologii jak również podstawowych oprogramowanych i przetestowanych algorytmów (po ewentualnej niezbyt skomplikowanej adaptacji) do analogicznych zagadnień liniowych z innych dziedzin.

2.4.3. Ograniczenia

MDW podlega dosyć restrykcyjnym ograniczeniom, które należy wziąć pod uwagę, rozważając możliwość jej stosowania. Są to przede wszystkim:

- liniowość geometryczna (istotą MDW jest intensywne wykorzystanie zasady superpozycji) – w przypadku dużych przemieszczeń MDW można stosować, jeśli na kolejnych przyrostach aktualizuje się macierz wpływu, co często może okazać się mało efektywne,
- problem rozmiaru macierzy wpływu,
- możliwość stosowania do zagadnień statycznych, bądź quasi-statycznych.

Odpowiedzią na ostatnie z ograniczeń jest prezentowana w niniejszej pracy oryginalna wersja metody – **Metoda Impulsowych Dystorsji Wirtualnych** – przeznaczona dla dynamicznych układów liniowych.

Rozdział 3

Dystorsje wirtualne w płaskiej konstrukcji ramowej

3.1. Wprowadzenie

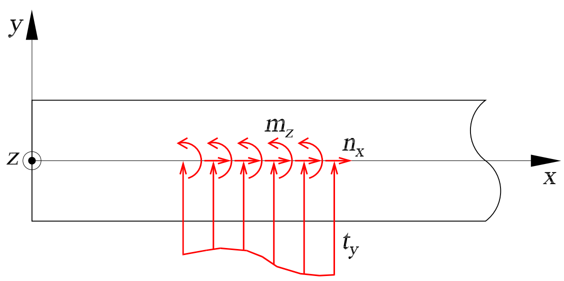
W rozdziale poprzednim przedstawiono koncepcję statycznej Metody Dystorsji Wirtualnych na przykładzie konstrukcji kratowych. Jak już wspomniano, w przypadku teorii kratownic trywializacji ulega wiele aspektów samej już teorii konstrukcji, a zatem również Metody Elementów Skończonych (MES), która stanowi bazę dla MDW. Jest to powodem pewnych uproszczeń, które pojawiają się w sformułowaniu MDW dla krat, co zresztą pozwala na bardzo przystępną prezentację jej głównych idei. Głównej tego przyczyny należy upatrywać w fakcie, iż stan odkształcenia elementu kratowego ma tylko *jedną* składową, a co za tym idzie istnieje tylko *jeden* możliwy typ imperfekcji (wydłużenie lub skrócenia pręta kratowego), a więc *jeden* rodzaj dystorsji, którą można wykorzystać do modelowania zmiany *jedynego* parametru sztywności jakim jest sztywność podłużna. W przypadku elementów ramowych taka trywializacja już nie występuje.

W tym rozdziale podane zostanie sformułowanie MDW dla płaskich konstrukcji ramowych. Zaprezentowane tutaj postępowanie będzie jednak miało o wiele bardziej ogólny charakter – podobnie jak poprzednio przedstawione koncepcje dadzą się uogólnić dla ustrojów składających się z innych elementów skończonych, przy czym uchwycone zostaną aspekty, które nie występowały w przypadku kratownic. W pracy [21] podano realizację dystorsji wirtualnych dla elementach ramowych, jednak w nieco innym ujęciu niż w niniejszym opracowaniu (nie skorzystano z rozwiązania zagadnienia własnego dla macierzy sztywności elementu skończonego).

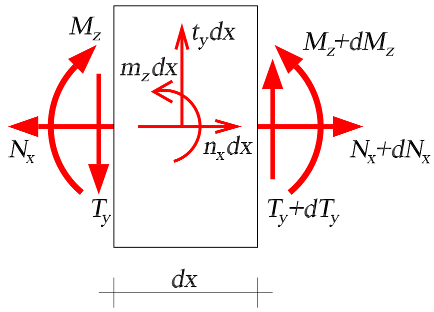
Rozdział jest dość obszerny. Na wstępie przypomniane zostaną podstawowe pojęcia, równania i związki dotyczące teorii dwuwymiarowych ram płaskich oraz belkowego elementu skończonego. Zostaną przedstawione rodzaje dystorsji "punktowych", które można realizować w belkach, oczywiście konsekwentne z występującymi w nich stanami uogólnionych odkształceń. Dla elementu skończonego przedstawiony zostanie sposób określania podstawowych stanów deformacji, a zatem i dystorsji wraz z odpowiadającymi im układami sił kompensacyjnych. Jak łatwo przewidzieć liczba dystorsji zależeć będzie stopni swobody elementu, a sugerowane postępowanie (dla dowolnych elementów skończonych) polegać będzie na rozwiązaniu zagadnienia własnego macierzy sztywności elementu w celu określenia jego deformacji własnych. W dalszej części rozdziału pokazany zostanie sposób budowy macierzy wpływu dla konstrukcji ramowych (zilustrowany przykładami), na zakończenie zaś przedstawiona zostanie idea modelowania defektów w belkach związana z modyfikacją ich parametrów projektowych.

3.2. Podstawowe równania belki płaskiej

Rysunek 3.1 przedstawia fragment prostego pręta pryzmatycznego, którego oś jest równoległa do osi x prawoskrętnego układu współrzędnych kartezjańskich $0xyz$. Mniej lub bardziej dokładny opis zginania, skręcania i rozciągania takiego pręta można łatwo znaleźć w wielu pozycjach z literatury dotyczącej mechaniki budowli – np. [4], jak również Metody Elementów Skończonych (dla mechaniki) – np. [45, 2, 47, 32, 54, 38]. Będziemy rozpatrywać zagadnienie osiowego rozciągania (ściskania) i jednocześnie płaskiego zginania takiego pręta w płaszczyźnie $z = \text{const}$. Podamy podstawowe równania opisujące to zagadnienie w ramach tzw. *teorii I rzędu*, która jako podstawę przyjmuje *założenie małych przemieszczeń*. Z założenia tego wynika między innymi fakt, że dla pręta prostego równania opisujące stan osiowego rozciągania (ściskania) oraz stan zginania są względem siebie rozdzielone, a zatem stany te mogą być rozwiązywane całkowicie niezależnie, a następnie – dzięki wykorzystaniu zasady "*zesztywnienia*", obowiązującej przy małych przemieszczeniach – *superponowane*. Na rys. 3.1 przedstawiono również **obciążenia zewnętrzne** – są to działające na jednostkę długości pręta: siła podłużna n_x, siła poprzeczna t_y oraz moment zginający m_z.



Rys. 3.1. Pręt ramy płaskiej.



Rys. 3.2. Równowaga lokalna płaskiego pręta ramowego.

Wycinek pręta o długości dx wraz z wszystkimi działającymi nań uogólnionymi siłami pokazano na rys. 3.2. Oprócz obciążeń zewnętrznych na infinitezymalny element belki działają **uogólnione siły przekrojowe**:

- N_x, T_y – siły: podłużna i poprzeczna,
- M_z – moment zginający belkę w płaszczyźnie $z = \text{const}$.

Uogólnione siły przekrojowe są całkami odpowiednich naprężeń po polu przekroju poprzecznego pręta:

$$N_x = \int_A \sigma_x \, dA, \qquad T_y = \int_A \sigma_{xy} \, dA, \qquad M_z = \int_A \sigma_x \, y \, dA. \tag{3.1}$$

Aby wycinek belki znajdował się w stanie równowagi, wszystkie działające na niego obciążenia muszą spełniać warunki równowagi płaskiego układu sił: $\sum X = 0$, $\sum Y = 0$, $\sum M_z = 0$. Podstawiając do nich siły działające na wycinek dx, otrzymujemy **równania równowagi**, wiążące uogólnione siły przekrojowe z obciążeniami zewnętrznymi:

$$\frac{dN_x}{dx} + n_x = 0, \qquad \frac{dT_y}{dx} + t_y = 0, \qquad \frac{dM_z}{dx} + T_y + m_z = 0. \tag{3.2}$$

Punkty leżące na osi odkształcalnego pręta mogą doznawać przesunięć, a przyporządkowane tym punktom przekroje – obrotów. Składowe wektora **uogólnionych przemieszczeń** osi pręta to:

- u, w – przemieszczenia poziome i pionowe punktów osi pręta,
- φ_z – kąt obrotu (w płaszczyźnie $z = \text{const}$) przekrojów poprzecznych belki; w ogólności zakładamy, że obrót ten nie jest tożsamy z kątem, jaki odkształcona oś pręta tworzy z osią x; natomiast w szczególności przyjmować będziemy tzw. *założenie Bernoulliego*, w którym rezygnujemy z kinematycznej niezależności kąta φ_z – jest on wtedy w jednoznaczny sposób zależny od ugięcia w.

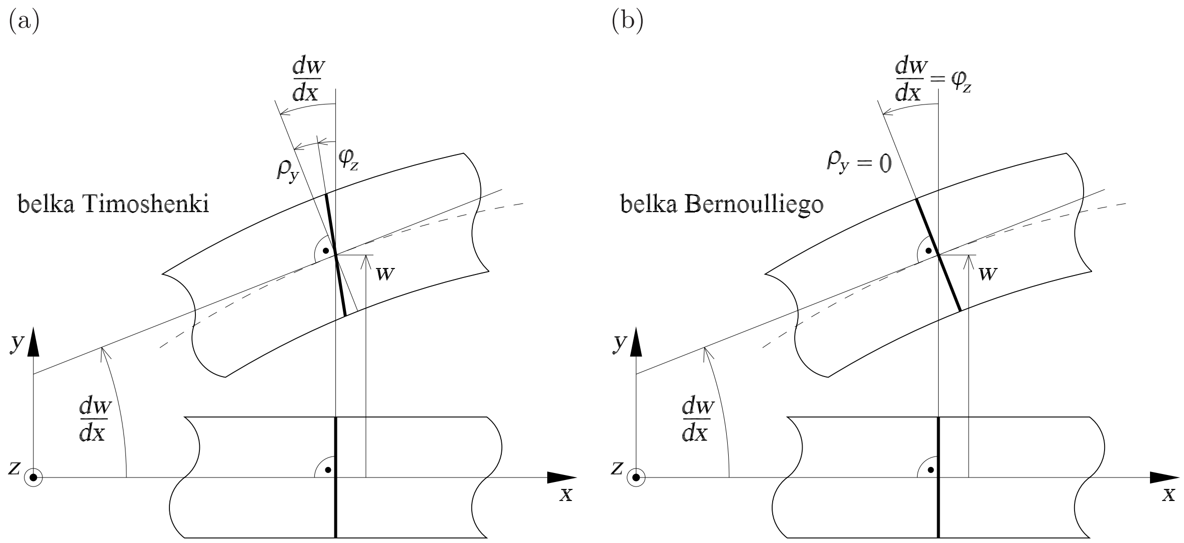
Ponadto należy przypomnieć i podkreślić, że przyjmując *założenie małych przemieszczeń* zakładamy, iż zarówno przesunięcia jak i obroty przyjmują odpowiednio małe wartości.

Z opisanymi przemieszczeniami wiążą się **uogólnione odkształcenia** pręta – należą do nich:

- ϵ_x – wydłużenie osi pręta (odkształcenia podłużne),

- ρ_y – uśredniony kąt odkształcenia postaciowego (odkształcenia postaciowe),
- κ_z – krzywizna osi pręta (odkształcenia zgięciowe).

Odkształcenia podłużne i zgięciowe (krzywiznowe) nie wymagają chyba komentarza. Należy natomiast przypomnieć, że kąt odkształcenia postaciowego jest pewną uśrednioną miarą *deplanacji* przekroju poprzecznego belki – w modelu matematycznym przekrój ten po deformacji (tj. wygięciu belki) pozostaje płaski, ale obrócony o pewien (uśredniony) kąt w stosunku do pierwotnego położenie prostopadłego względem osi głównej. Taki model jest często określany mianem *belki Timoshenki*. Wzajemne korelacje pomiędzy ugięciem w, kątem odkształcenia postaciowego ρ_y, oraz całkowitym kątem obrotu φ_z przekroju poprzecznego belki płaskiej przedstawiono na rys. 3.3(a). Wpływ odkształceń postaciowych jest z reguły o wiele mniejszy niż odkształceń krzywiznowych i należy go uwzględniać tylko w przypadku belek o (względnie) dość "wysokim" przekroju poprzecznym. Zazwyczaj można ten wpływ zaniedbać przyjmując założenie Bernoulliego wraz z wynikającymi z niego konsekwencjami (patrz dalej). Przypadek ten pokazano na rys. 3.3(b).



Rys. 3.3. Wzajemne relacje pomiędzy w, φ_z i ρ_y dla przypadków: (a) uwzględniania odkształceń postaciowych (według hipotezy Timoshenki), (b) stosowania założenia Bernoulliego.

Związki geometryczne określające relacje pomiędzy odkształceniami uogólnionymi i przemieszczeniami osi belki są następujące:

$$\epsilon_x = \frac{du}{dx}, \qquad \rho_y = \frac{dw}{dx} - \varphi_z, \qquad \kappa_z = \frac{d\varphi_z}{dx}. \tag{3.3}$$

Przyjmujemy, że dla każdego x przekrój pręta wykonany jest z jednorodnego, izotropowego materiału liniowo spężystego. Zatem **związki konstytutywne** – łączące uogólnione odkształcenia sprężyste z siłami wewnętrznymi – mają następującą postać:

$$\epsilon_x = \frac{N_x}{EA} + \hat{\epsilon}_x, \qquad \rho_y = \frac{\beta_y T_y}{GA} + \hat{\rho}_y, \qquad \kappa_z = \frac{M_z}{EJ_z} + \hat{\kappa}_z, \tag{3.4}$$

gdzie: E, $G = \frac{E}{2(1+\nu)}$ to moduły Younga i Kirchhoffa sprężystego, izotropowego materiału pręta (ν jest liczbą Poissona), A, $J_z = \int_A y^2\, dA$ to pole przekroju poprzecznego oraz jego moment bezwładności względem osi z, natomiast:

$$\beta_y = \frac{A}{J_z^2} \int\limits_A \frac{S_z^2(y)}{b_z^2(y)}\, dA \tag{3.5}$$

jest pewną bezwymiarową charakterystyką kształtu przekroju poprzecznego pręta, przy czym: $S_z(y)$ to moment statyczny odpowiedniej części przekroju obliczony względem osi z, zaś $b_z(y)$ – szerokość przekroju w odległości y od osi z.

W równaniach konstytutywnych (3.4) pojawiają się bardzo ważne dla koncepcji dystorsji wirtualnych wielkości: $\hat{\epsilon}_x$, $\hat{\rho}_y$, $\hat{\kappa}_z$. Są to odpowiednie odkształcenia uogólnione wynikające z *oddziaływań pozastatycznych* nałożonych na rozpatrywany przekrój belki, takich jak np. imperfekcja geometryczna, czy obciążenie termiczne. Odwrotna postać związku konstytutywnego jest następująca:

$$N_x = EA\,(\epsilon_x - \hat{\epsilon}_x), \qquad T_y = \frac{GA}{\beta_y}\,(\rho_y - \hat{\rho}_y), \qquad M_z = EJ_z\,(\kappa_z - \hat{\kappa}_z), \tag{3.6}$$

Założenie Bernoulliego mówi, że przekroje poprzeczne belki (tj. prostopadłe do jego osi) nie tylko pozostają *płaskie* po deformacji, ale również prostopadłe do osi odkształconego pręta (patrz rys. 3.3(b)). Akceptując to założenie, pomijamy całkowicie wpływ odkształceń postaciowych, czyli przyjmujemy, że $\rho_y = 0$ (i oczywiście również $\hat{\rho}_y = 0$), co oznacza (zgodnie z równaniem $(3.3)_2$), że kąt obrotu osi pręta jest teraz równy:

$$\varphi_z = \frac{dw}{dx}, \tag{3.7}$$

a krzywizna

$$\kappa_z = \frac{d^2w}{dx^2}. \tag{3.8}$$

Zatem kąt obrotu φ_z przestaje być zmienną niezależną.

Zgodnie ze związkiem konstytutywnym $(3.6)_2$ siła poprzeczna T_y powinna być teraz zerowa. Z równania równowagi $(3.2)_3$ wynika jednak, że:

$$T_y = -\frac{dM_z}{dx} - m_z. \tag{3.9}$$

Oczywiście w ogólnym przypadku wyrażenie to jest niezerowe – nie można więc pomijać sił poprzecznych, gdyż niezbędne są one do zachowania równowagi lokalnej. Zatem niezerowa siła poprzeczna T_y nie wykonuje pracy na żadnych odkształceniach i nie podlega związkowi konstytutywnemu, gdyż musimy zrezygnować z wzorów $(3.4)_2$ i $(3.6)_2$. Jest to pewna niekonsekwencja, a zarazem odmienność w stosunku do innych – właściwych sił wewnętrznych (tj. N_x i M_z), wynikające z przyjętego założenia. Siły poprzeczne należy więc w tym przypadku traktować raczej jako swego rodzaju *reakcję wewnętrzną* obliczaną według wzoru (3.9), a nie jako “pełnoprawną” siłę wewnętrzną, mającą swój udział w energii sprężystej (rozumianej jako praca sił wewnętrznych na uogólnionych odkształceniach sprężystych).

3.3. Dystorsje w belce płaskiej

Wprowadzenie dystorsji w danym punkcie konstrukcji oznacza wygenerowanie w tym punkcie *wstępnego odkształcenia* $\hat{\boldsymbol{\epsilon}}$. W przypadku belki przez punkt konstrukcji rozumiemy przekrój poprzeczny określony jednoznacznie przez współrzędną x. W każdym przekroju x belki określone są uogólnione odkształcenia (3.3), które grupujemy w **wektor uogólnionych odkształceń** belki płaskiej:

$$\boldsymbol{\epsilon} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{bmatrix} \epsilon_x \\ \rho_y \\ \kappa_z \end{bmatrix}. \tag{3.10}$$

Jeśli pomijamy odkształcenia postaciowe $(3.3)_2$, to dla każdego x określony jest wektor odkształceń uogólnionych w postaci:

$$\boldsymbol{\epsilon} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{bmatrix} \epsilon_x \\ \kappa_z \end{bmatrix}. \tag{3.11}$$

Zatem w każdym punkcie x belki płaskiej możemy wprowadzić dystorsję jednoznacznie określoną przez wektor

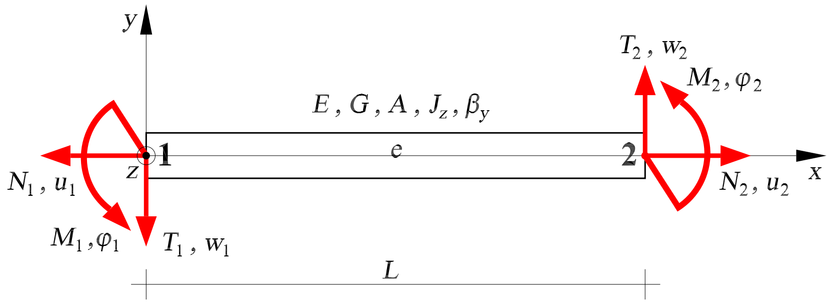
$$\hat{\boldsymbol{\epsilon}} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{bmatrix} \hat{\epsilon}_x \\ \hat{\rho}_y \\ \hat{\kappa}_z \end{bmatrix}, \qquad \text{albo} \qquad \hat{\boldsymbol{\epsilon}} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{bmatrix} \hat{\epsilon}_x \\ \hat{\kappa}_z \end{bmatrix} \tag{3.12}$$

przy czym w tym drugim przypadku całkowicie pomijamy dystorsje (odkształcenia) postaciowe.

Składową $\hat{\epsilon}_x$ wektora dystorsji będziemy nazywać **dystorsją podłużną**, natomiast składowe $\hat{\kappa}_z$ i $\hat{\rho}_y$ to **dystorsja krzywiznowa** oraz **dystorsja postaciowa**. Dystorsja podłużna opisuje wprowadzenie w punkcie belki wstępnego odkształcenia podłużnego, natomiast dystorsja krzywiznowa – wstępnego stanu czystego zginania. Z kolei dystorsja postaciowa opisuje wprowadzenie wstępnego stanu ścinania w punkcie pręta. Przypomnijmy jednak, że w konstrukcji belkowej nie jest możliwy stan czystego ścinania – odkształceniom postaciowym ρ_y zawsze towarzyszyć będą odkształcenia stanu zginania κ_z. Zatem nie można również mówić o generowniu w punkcie belki czystej dystorsji postaciowej $\hat{\rho}_y$, gdyż towarzyszyć jej musi odpowiednia składowa zgięciowa $\hat{\kappa}_z$. Można natomiast wprowadzać czyste wstępne odkształcenia podłużne $\hat{\epsilon}_z$ albo krzywiznowe $\hat{\kappa}_z$, przy czym każde z nich z reguły wygeneruje w konstrukcji ramowej, której fragmentem jest belka, odkształcenia resydualne dowolnej postaci.

3.4. Element skończony ramy płaskiej

W podrozdziale tym zajmiemy się ramowym elementem skończonym. Istnieje bogata literatura dla Metody Elementów Skończonych [45, 54, 32, 47, 2, 3, 38, 4, 9] – w każdej z tych pozycji można znaleźć opis elementów ramowych.



Rys. 3.4. Element skończony ramy płaskiej.

Rozpatrzmy **element skończony ramy płaskiej** pokazany na rys. 3.4. Przyjmujemy, że element e o długości L, w całości wykonany jest z materiału sprężystego o module Younga E i module Kirchhoffa G. Pole przekroju poprzecznego elementu wynosi A, a jego geometrię dodatkowo określają moduł bezwładności J_z i charakterystyka kształtu β_y. Na rysunku przedstawiono dodatnie kierunki zarówno uogólnionych przemieszczeń węzłów elementu, jak i uogólnionych sił węzłowych. **Wektor uogólnionych przemieszczeń węzłowych**, określony w układzie lokalnym elementu, ma postać:

$$\mathbf{q}^{(e)} = \begin{bmatrix} u_1 & w_1 & \varphi_1 & u_2 & w_2 & \varphi_2 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}, \tag{3.13}$$

natomiast siły węzłowe grupujemy w **wektor węzłowych obciążeń statycznych** w następujący sposób:

$$\mathbf{Q}^{(e)} = \begin{bmatrix} N_1 & T_1 & M_1 & N_2 & T_2 & M_2 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}. \tag{3.14}$$

Element e znajduje się w równowadze, gdy spełnione jest równanie:

$$\mathbf{K}^{(e)}\mathbf{q}^{(e)} = \mathbf{Q}^{(e)}, \tag{3.15}$$

gdzie symetryczna **macierz sztywności** elementu ramy płaskiej wyraża się wzorem:

$$\mathbf{K}^{(e)} = E \begin{bmatrix} \frac{A}{L} & 0 & 0 & -\frac{A}{L} & 0 & 0 \\ & \frac{12J_z}{(1+12\gamma_y)\,L^3} & \frac{6J_z}{(1+12\gamma_y)\,L^2} & 0 & -\frac{12J_z}{(1+12\gamma_y)\,L^3} & \frac{6J_z}{(1+12\gamma_y)\,L^2} \\ & & \frac{4(1+3\gamma_y)\,J_z}{(1+12\gamma_y)\,L} & 0 & -\frac{6J_z}{(1+12\gamma_y)\,L^2} & \frac{2(1-6\gamma_y)\,J_z}{(1+12\gamma_y)\,L} \\ & & & \frac{A}{L} & 0 & 0 \\ & \text{symetria} & & & \frac{12J_z}{(1+12\gamma_y)\,L^3} & -\frac{6J_z}{(1+12\gamma_y)\,L^2} \\ & & & & & \frac{4(1+3\gamma_y)\,J_z}{(1+12\gamma_y)\,L} \end{bmatrix}, \tag{3.16}$$

Występujący w powyższej formule współczynnik γ_y wynika z uwzględnienia uśrednionych odkształceń postaciowych i ma postać:

$$\gamma_y = \frac{\beta_y E J_z}{L^2 G A} = \frac{E}{L^2 G J_z} \int_A \frac{S_z^2(z)}{b_z^2(z)}\, dA = \frac{2(1+\nu)}{L^2 J_z} \int_A \frac{S_z^2(z)}{b_z^2(z)}\, dA, \tag{3.17}$$

wynikającą z wykorzystania wzoru (3.5). W przypadku, gdy pomijamy wpływ odkształceń postaciowych $\gamma_y = 0$ i wtedy wzór na macierz sztywności jest prostszej postaci:

$$\mathbf{K}^{(e)} = E \begin{bmatrix} \frac{A}{L} & 0 & 0 & -\frac{A}{L} & 0 & 0 \\ & \frac{12J_z}{L^3} & \frac{6J_z}{L^2} & 0 & -\frac{12J_z}{L^3} & \frac{6J_z}{L^2} \\ & & \frac{4J_z}{L} & 0 & -\frac{6J_z}{L^2} & \frac{2J_z}{L} \\ & & & \frac{A}{L} & 0 & 0 \\ & \text{symetria} & & & \frac{12J_z}{L^3} & -\frac{6J_z}{L^2} \\ & & & & & \frac{4J_z}{L} \end{bmatrix}. \tag{3.18}$$

Przy wyprowadzeniu podanych tutaj *a-priori* wzorów na macierz sztywności (3.16) lub (3.18), ogromnie istotną rolę odgrywają tzw. *funkcje kształtu*, określające związek pomiędzy uogólnionymi przemieszczeniami węzłów elementu, a jego polem uogólnionych przemieszczeń. Bardziej szczegółowo zostaną one omówione w następnym podrozddziale.

Dla zagadnień dynamiki oprócz macierzy sztywności potrzebne są jeszcze **macierz bezwładności**: $\mathbf{M}^{(e)}$, oraz **macierz tłumienia**: $\mathbf{C}^{(e)}$. Macierze te (w przeciwieństwie do macierzy sztywności) nie będą nam potrzebne do opisu typów dystorsyjnych, zatem tutaj przypomnimy tylko krótko sposób ich wyprowadzenia. Odpowiednie wzory można znaleźć w literaturze [45, 54, 32, 47, 2, 3, 6, 9].

Macierz bezwładności (zwana również macierzą mas) otrzymywana jest poprzez różniczkowanie po czasie pola przemieszczeń elementu i wykorzystanie *zasady d'Alamberta*. Jest ona – podobnie jak macierz sztywności – symetryczna, i często nazywana jest *konsekwentną*[7)] macierzą bezwładności, ponieważ przy jej konstrukcji wykorzystuje się te same funkcje kształtu, co w przypadku macierzy sztywności. Czasem można również posługiwać się tzw. *diagonalną* macierzą bezwładności, którą konstruuje się dla mas skupionych w węzłach, często pomijając przy tym rotacyjne stopnie bezwładności. Stosowanie diagonalnej macierzy mas powinno być konsekwentne, tzn. dla wszystkich elementów konstrukcji, tak, aby otrzymać diagonalną macierz bezwładności całej konstrukcji, co ma na celu zmniejszenie kosztów numerycznych i uproszczenie analizy dynamicznej. W ogólności jednak, tego typu podejście daje wyniki o wiele mniej dokładne i ma ono sens tylko w przypadku dość gęstej dyskretyzacji lub gdy mamy do czynienia z dyskretnym rozkładem masy (duże masy skupione w węzłach).

Określenie macierzy tłumienia jest zagadnieniem o wiele bardziej skomplikowanym. Jej postać zależy od przyjętego modelu tłumienia. Na szczęście w obszernej klasie zagadnień dynamiki tłumienie może być całkowicie pominięte. Wyrażenie na elementową macierz tłumienia, $\mathbf{C}^{(e)}$, można otrzymać postępując analogicznie jak w przypadku macierzy bezwładności, przy czym zamiast czynnika gęstości masy występuje parametr tłumienia.

7) Używana jest również nazwa *konsystentna* macierz mas, nawiązująca do terminologii angielskiej (*consistent* [ang.] – konsekwentny, zgodny).

Określanie tego parametru dla poszczególnych elementów nie jest proste i nie zawsze ma sens, gdyż tłumienie jest jednak cechą o wiele bardziej właściwą dla całej konstrukcji niż możliwą do złożenia z tłumień charakterystycznych dla jej poszczególnych fragmentów. W praktyce zwykle określa się macierz tłumienia globalnie dla całej konstrukcji. Najczęściej przyjmuje się wtedy prosty model *tłumienia proporcjonalnego*, w którym globalna macierz tłumienia konstrukcji **C** jest kombinacją liniową globalnej macierzy sztywności **K** i globalnej macierzy bezwładności **M**, tzn.:

$$\mathbf{C} = \alpha_{\text{wew}}\,\mathbf{K} + \alpha_{\text{zew}}\,\mathbf{M}, \tag{3.19}$$

gdzie α_{wew} i α_{zew} są współczynnikami tłumienia *wewnętrznego* i *zewnętrznego*. Procedura ich wyznaczania bazuje na określeniu tłumienia charakterystycznego dla poszczególnych postaci drgań własnych, przy czym: jeśli $\alpha_{\text{wew}} = 0$, to w konstrukcji postacie drgań odpowiadające najwyższym częstościom własnym są tłumione słabo, natomiast jeśli $\alpha_{\text{zew}} = 0$, to postacie drgań o najwyższych częstościach są tłumione silnie. Tłumienie konstrukcji opisane macierzą **C** o postaci (3.19) nosi nazwę *tłumienia Rayleigha*.

3.5. Składowe odkształcenia i dystorsje w elemencie ramy płaskiej

Jak wiadomo w Metodzie Elementów Skończonych (MES) stanowiącej podstawę dla MDW niewiadomymi są uogólnione przemieszczenia węzłów konstrukcji. Z kolei wektor prawej strony układu równań MES stanowią obciążenia węzłowe. Oznacza to, iż wszystkie obciążenia statyczne konstrukcji muszą być najpierw sprowadzone do adekwatnych im obciążeń węzłowych. Również oddziaływania pozastatyczne (w tym dystorsje wirtualne) zastąpione muszą być ekwiwalentnym obciążeniem kompensacyjnym w postaci układu uogólnionych sił węzłowych. Oczywiście przemieszczeniowe warunki brzegowe uwzględniane są w trakcie rozwiązywania podstawowego układu równań liniowych MES, a ich obecność warunkuje możliwość wyznaczenia jednoznacznego rozwiązania (kinematyczne warunki brzegowe muszą zapewniać geometryczną niezmienność konstrukcji, czyli nieosobliwość macierzy sztywności). Po rozwiązaniu układu równań MES można starać się uwzględnić specyficzny charakter obciążenia danego elementu rozpatrując jego lokalną równowagę. Podobnie jak dowolnemu obciążeniu elementowemu odpowiada pewien stan obciążeń węzłowych, tak i dowolną dystorsję, tj. wstępną deformację elementu, można sprowadzić do pewnych względnych przemieszczeń i obrotów jego węzłów – te *wstępne*, uogólnione przemieszczenia węzłów wyznaczą wpływ lokalnie zadanej dystorsji na pozostałe elementy ustroju. Z kolei pola przemieszczeń uogólnionych elementu skończonego w jednoznaczny sposób zależą od przemieszczeń węzłowych tego elementu. Zależność ta opisana jest za pomocą wspomnianych już **funkcji kształtu**. Dla różnych elementów skończonych funkcje te konstruowane są w różny sposób, zawsze jednak w zależności od liczby i charakteru geometrycznych parametrów węzłowych.

W związku z rozdzieleniem stanów odkształcenia podłużnego i krzywiznowego, przemieszczenia poziome prętowego elementu skończonego zależą tylko od poziomych prze-

mieszczeń jego węzłów:

$$u^{(e)}(x) = N_{uu_1}(x)\, u_1 + N_{uu_2}(x)\, u_2, \tag{3.20}$$

natomiast jego ugięcia oraz kąty obrotu przekrojów poprzecznych zależą od przemieszczeń pionowych i obrotów węzłów:

$$w^{(e)}(x) = N_{ww_1}(x)\, w_1 + N_{w\varphi_1}(x)\, \varphi_1 + N_{ww_2}(x)\, w_2 + N_{w\varphi_2}(x)\, \varphi_2, \tag{3.21}$$

$$\varphi_z^{(e)}(x) = N_{\varphi w_1}(x)\, w_1 + N_{\varphi\varphi_1}(x)\, \varphi_1 + N_{\varphi w_2}(x)\, w_2 + N_{\varphi\varphi_2}(x)\, \varphi_2, \tag{3.22}$$

Występujące w równaniach (3.20)–(3.22) wielkości $N_{uu_1}(x), \ldots, N_{\varphi\varphi_2}(x)$ to właśnie **funkcje kształtu elementu ramy płaskiej**. Ich postać zostanie przedstawiona w dalszej części tego podrozdziału. Teraz przypomnijmy tylko, że w przypadku teorii belek Bernoulliego zachodzi związek (3.7), który całkowicie uzależnia kąt obrotu $\varphi_z^{(e)}(x)$ od ugięcia $w^{(e)}(x)$. Zgodnie z tym funkcje kształtu występujące w równaniu (3.22) muszą być w tym przypadku pochodnymi odpowiednich funkcji kształtu z równania (3.21):

$$\begin{aligned} N_{\varphi w_1}(x) &= N'_{ww_1}(x), & N_{\varphi\varphi_1}(x) &= N'_{w\varphi_1}(x), \\ N_{\varphi w_2}(x) &= N'_{ww_2}(x), & N_{\varphi\varphi_2}(x) &= N'_{w\varphi_2}(x). \end{aligned} \tag{3.23}$$

Symbol "$'$" oznacza tutaj różniczkowanie po zmiennej x, tj.: $(\ldots)' = \frac{d(\ldots)}{dx}$.

Zdefiniujmy poniżej funkcję wektorową opisującą **pola przemieszczeń elementu** ramy płaskiej:

$$\mathbf{u}^{(e)}(x) \overset{\text{def}}{=} \begin{bmatrix} u^{(e)}(x) \\ w^{(e)}(x) \\ \varphi_z^{(e)}(x) \end{bmatrix}, \tag{3.24}$$

pamiętając, że w przypadku belek Bernoulliego funkcja $\varphi_z^{(e)}(x)$ nie będzie składową niezależną. Teraz zależność pola przemieszczeń od uogólnionych przemieszczeń węzłowych można zapisać zwięźle w postaci:

$$\mathbf{u}^{(e)}(x) = \mathbf{N}^{(e)}(x)\, \mathbf{q}^{(e)}, \tag{3.25}$$

gdzie $\mathbf{N}^{(e)}(x)$ jest **macierzą funkcji kształtu** o postaci:

$$\mathbf{N}^{(e)}(x) = \begin{bmatrix} N_{uu_1} & 0 & 0 & N_{uu_2} & 0 & 0 \\ 0 & N_{ww_1} & N_{w\varphi_1} & 0 & N_{ww_2} & N_{w\varphi_2} \\ 0 & N_{\varphi w_1} & N_{\varphi\varphi_1} & 0 & N_{\varphi w_2} & N_{\varphi\varphi_2} \end{bmatrix}. \tag{3.26}$$

Z kolei **odkształcenia uogólnione elementu** ramy płaskiej opiszemy funkcją wektorową analogiczną z definicjami wektorów (3.10) i (3.11), czyli:

$$\boldsymbol{\epsilon}^{(e)}(x) \overset{\text{def}}{=} \begin{bmatrix} \epsilon_x^{(e)}(x) \\ \rho_y^{(e)}(x) \\ \kappa_z^{(e)}(x) \end{bmatrix}, \qquad \text{albo} \qquad \boldsymbol{\epsilon}^{(e)}(x) \overset{\text{def}}{=} \begin{bmatrix} \epsilon_x^{(e)}(x) \\ \kappa_z^{(e)}(x) \end{bmatrix}, \tag{3.27}$$

odpowiednio dla: elementów skończonych uwzględniających odkształcenia postaciowe, oraz elementów wykorzystujących założenie Bernoulliego.

Między składowymi wektora odkształcenia elementu ramy, a uogólnionymi przemieszczeniami węzłowymi zachodzi związek, będący wynikiem różniczkowania równania (3.25) zgodnie z formułami (3.3):

$$\boldsymbol{\epsilon}^{(e)}(x) = \mathbf{B}^{(e)}(x)\,\mathbf{q}^{(e)}. \tag{3.28}$$

Występująca w powyższym równaniu **macierz pochodnych funkcji kształtu**[8)], $\mathbf{B}^{(e)}(x)$, jest wynikiem odpowiedniego różniczkowania składowych macierzy $\mathbf{N}^{(e)}(x)$ i można ją przedstawić jako iloczyn pewnego macierzowego operatora różniczkowego i macierzy funkcji kształtu:

$$\mathbf{B}^{(e)}(x) = \boldsymbol{\Delta}\,\mathbf{N}^{(e)}(x). \tag{3.29}$$

Postać operatora $\boldsymbol{\Delta}$, jak również jego wymiar, zależy od tego którą z definicji (3.27) zastosujemy. Dla elementów ramowych, w których uwzględniamy odkształcenia postaciowe (a więc, gdy stosujemy definicję $(3.27)_1$) przyjmujemy

$$\boldsymbol{\Delta} = \begin{bmatrix} \frac{d}{dx} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{d}{dx} & -1 \\ 0 & 0 & \frac{d}{dx} \end{bmatrix} \tag{3.30}$$

i macierz pochodnych funkcji kształtu jest macierzą o wymiarze (3×6) i postaci:

$$\mathbf{B}^{(e)}(x) = \begin{bmatrix} B_{\epsilon u_1} & 0 & 0 & B_{\epsilon u_2} & 0 & 0 \\ 0 & B_{\rho w_1} & B_{\rho\varphi_1} & 0 & B_{\rho w_2} & B_{\rho\varphi_2} \\ 0 & B_{\kappa w_1} & B_{\kappa\varphi_1} & 0 & B_{\kappa w_2} & B_{\kappa\varphi_2} \end{bmatrix}, \tag{3.31}$$

gdzie niezerowe składowe wynoszą:

$$B_{\epsilon u_1}(x) = N'_{uu_1}(x), \qquad B_{\epsilon u_2}(x) = N'_{uu_2}(x), \tag{3.32}$$

$$\begin{aligned} B_{\rho w_1}(x) &= N'_{ww_1}(x) - N_{\varphi w_1}(x), & B_{\rho\varphi_1}(x) &= N'_{w\varphi_1}(x) - N_{\varphi\varphi_1}(x), \\ B_{\rho w_2}(x) &= N'_{ww_2}(x) - N_{\varphi w_2}(x), & B_{\rho\varphi_2}(x) &= N'_{w\varphi_2}(x) - N_{\varphi\varphi_2}(x), \end{aligned} \tag{3.33}$$

$$\begin{aligned} B_{\kappa w_1}(x) &= N'_{\varphi w_1}(x), & B_{\kappa\varphi_1}(x) &= N'_{\varphi\varphi_1}(x), \\ B_{\kappa w_2}(x) &= N'_{\varphi w_2}(x), & B_{\kappa\varphi_2}(x) &= N'_{\varphi\varphi_2}(x), \end{aligned} \tag{3.34}$$

przy czym, oczywiście, w powyższych wzorach $(\ldots)' = \frac{d}{dx}$.

W przypadku elementów opartych na założeniu Bernoulliego pomijamy odkształcenia postaciowe, co oznacza wyzerowanie składowych (3.33):

$$B_{\rho w_1}(x) = B_{\rho\varphi_1}(x) = B_{\rho w_2}(x) = B_{\rho\varphi_2}(x) \equiv 0. \tag{3.35}$$

8) Macierz ta nazywana jest również *macierzą odkształcenie-przemieszczenie* (z ang. *strain-displacement matrix*).

Sens ma posługiwanie się wtedy definicją (3.27)$_2$, a operator różniczkowy z równania (3.29) przyjmuje postać:

$$\boldsymbol{\Delta} = \begin{bmatrix} \frac{d}{dx} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{d}{dx} \end{bmatrix}. \tag{3.36}$$

Zauważmy jednak, iż lepiej od razu uwzględnić zachodzące w tym przypadku związki (3.23) i operator $\boldsymbol{\Delta}$ zdefiniować w następujący sposób:

$$\boldsymbol{\Delta} = \begin{bmatrix} \frac{d}{dx} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{d^2}{dx^2} & 0 \end{bmatrix}. \tag{3.37}$$

Macierz pochodnych funkcji kształtu ma teraz wymiar (2×6):

$$\mathbf{B}^{(e)}(x) = \begin{bmatrix} B_{\epsilon u_1} & 0 & 0 & B_{\epsilon u_2} & 0 & 0 \\ 0 & B_{\kappa w_1} & B_{\kappa \varphi_1} & 0 & B_{\kappa w_2} & B_{\kappa \varphi_2} \end{bmatrix}, \tag{3.38}$$

a niezerowe składowe są równe (3.32) oraz:

$$\begin{aligned} B_{\kappa w_1}(x) &= N''_{ww_1}(x), & B_{\kappa \varphi_1}(x) &= N''_{w\varphi_1}(x), \\ B_{\kappa w_2}(x) &= N''_{ww_2}(x), & B_{\kappa \varphi_2}(x) &= N''_{w\varphi_2}(x), \end{aligned} \tag{3.39}$$

gdzie symbol „$''$” oznacza drugą pochodną względem x, tj.: $(\ldots)'' = \frac{d^2(\ldots)}{dx^2}$.

Istotą opisanych równaniami (3.25) i (3.28) zależności pól przemieszczeń i odkształceń od przemieszczeń węzłowych są funkcje kształtu. W ogólnym przypadku przy konstruowaniu funkcji kształtu zwykle wykorzystuje się różnego rodzaju techniki interpolacyjne (wielomiany Lagrange'a, Hermite'a itp.). W przypadku elementu ramowego również można stosować podejście interpolacyjne. Nie jest to jednak konieczne, gdyż dla prętów i belek opis pól przemieszczeń bardzo łatwo można uzyskać przez rozwiązanie odpowiednich równań różniczkowych – otrzymuje się wtedy tzw. **ścisłe funkcje kształtu**[9], warunkujące zupełną zgodność MES z rozwiązaniami analitycznymi. I tak, dla stanu osiowego otrzymujemy funkcje kształtu znane z prętów kratowych:

$$N_{uu_1}(x) = 1 - \frac{x}{L}, \qquad N_{uu_2}(x) = \frac{x}{L}, \tag{3.40}$$

natomiast dla stanu zgięciowego, przy założeniu Bernoulliego[10], dostajemy:

$$\begin{aligned} N_{ww_1}(x) &= 1 - \frac{3x^2}{L^2} + \frac{2x^3}{L^3}, & N_{w\varphi_1}(x) &= x - \frac{2x^2}{L} + \frac{x^3}{L^2}, \\ N_{ww_2}(x) &= \frac{3x^2}{L^2} - \frac{2x^3}{L^3}, & N_{w\varphi_2}(x) &= -\frac{x^2}{L} + \frac{x^3}{L^2}. \end{aligned} \tag{3.41}$$

[9] Często określa się je niezbyt poprawnie terminem *fizyczne funkcje kształtu*.

[10] W dalszych rozważaniach ograniczać się już właściwie będziemy tylko do teorii uwzględniającej założenie Bernoulliego. Postępowanie uwzględniające wpływ odkształceń postaciowych jest jednak zupełnie analogiczne, a poza tym (jak zostanie pokazane) nie zwiększa liczby parametrów koniecznych do opisu stanu odkształcenia elementu skończonego (z uwagi na niemożność realizacji w belkach stanu czystej deformacji postaciowej).

Zauważmy skądinąd, że funkcje (3.40) są wielomianami Lagrange'a jednej zmiennej, zaś wyrażenia (3.41) to wielomiany Hermite'a pierwszego rzędu.

Dla ścisłych funkcji kształtu (3.40), (3.41) macierz pochodnych funkcji kształtu (3.38) wynosi:

$$\mathbf{B}^{(e)}(x) = \begin{bmatrix} -\frac{1}{L} & 0 & 0 & \frac{1}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \left(-\frac{6}{L^2} + \frac{12x}{L^3}\right) & \left(-\frac{4}{L} + \frac{6x}{L^2}\right) & 0 & \left(\frac{6}{L^2} - \frac{12x}{L^3}\right) & \left(-\frac{2}{L} + \frac{6x}{L^2}\right) \end{bmatrix}. \tag{3.42}$$

Oznacza to, że odkształcenia podłużne są stałe na całej długości pręta:

$$\epsilon_x^{(e)}(x) = \text{const} = \frac{u_2 - u_1}{L}, \tag{3.43}$$

natomiast krzywizna, opisana wzorem:

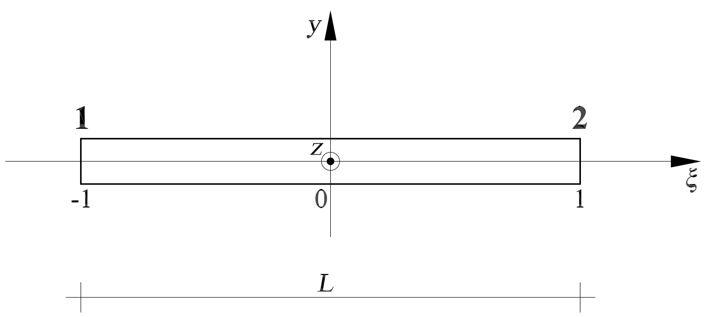
$$\kappa_z^{(e)}(x) = \left(-\frac{6}{L^2} + \frac{12x}{L^3}\right) w_1 + \left(-\frac{4}{L} + \frac{6x}{L^2}\right) \varphi_1 + \left(\frac{6}{L^2} - \frac{12x}{L^3}\right) w_2 + \left(-\frac{2}{L} + \frac{6x}{L^2}\right) \varphi_2, \tag{3.44}$$

jest liniową funkcją parametru x.

W dalszych rozważaniach zrezygnujemy z posługiwania się współrzędną x na rzecz współrzędnej bezwymiarowej. Wybór tej współrzędnej w istotny sposób wpłynie na definicje wielkości, które wykorzystywać będziemy do opisu odkształcenia elementu ramy płaskiej, a więc w konsekwencji na to jakie liczby magazynować będziemy w odkształceniowej macierzy wpływu oraz w jaki sposób definiowane będą stany dystorsyjne możliwe do zrealizowania w ramowym elemencie skończonym.

Wprowadzamy zatem następującą współrzędną bezwymiarową parametryzującą prostoliniowy element skończony ramy płaskiej:

$$\xi \stackrel{\text{def}}{=} \frac{2x}{L} - 1, \qquad \xi \in \langle -1\,, +1 \rangle. \tag{3.45}$$



Rys. 3.5. Parametryzacja bezwymiarowa elementu skończonego ramy płaskiej.

Jak widać (rys. 3.5) w przyjętej przez nas parametryzacji[11)] współrzędna $\xi = 0$ określa środkowy przekrój elementu skończonego, zaś dla $\xi = \pm 1$ dostajemy przekroje przywęzłowe.

W nowej parametryzacji składowe wektorów (3.27) uzależniamy od współrzędnej ξ:

$$\boldsymbol{\epsilon}^{(e)}(\xi) = \begin{bmatrix} \epsilon_x^{(e)}(\xi) \\ \rho_y^{(e)}(\xi) \\ \kappa_z^{(e)}(\xi) \end{bmatrix}, \qquad \text{albo} \qquad \boldsymbol{\epsilon}^{(e)}(\xi) = \begin{bmatrix} \epsilon_x^{(e)}(\xi) \\ \kappa_z^{(e)}(\xi) \end{bmatrix}, \tag{3.46}$$

dzięki podstawieniu

$$x = \frac{L}{2}(\xi + 1), \tag{3.47}$$

wynikającemu z definicji (3.45). Macierz pochodnych funkcji kształtu przy zastosowaniu współrzędnej bezwymiarowej zapisujemy w postaci:

$$\mathbf{B}^{(e)}(\xi) = \begin{bmatrix} -\dfrac{1}{L} & 0 & 0 & \dfrac{1}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{6\xi}{L^2} & -\dfrac{1-3\xi}{L} & 0 & -\dfrac{6\xi}{L^2} & \dfrac{1+3\xi}{L} \end{bmatrix}. \tag{3.48}$$

Jak widać wprowadzenie parametryzacji (3.45) nie zmieni, co oczywiste, wzoru na odkształcenie podłużne (3.43). Natomiast, uwzględniając w wyrażeniu (3.44) związek (3.47), wyrażenie na odkształcenia krzywiznowe zapisujemy w następującej formie eksponującej zależność od współrzędnej ξ:

$$\begin{aligned} \kappa_z^{(e)}(\xi) &= \frac{6\xi}{L^2} w_1 + \frac{-1+3\xi}{L} \varphi_1 + \frac{-6\xi}{L^2} w_2 + \frac{1+3\xi}{L} \varphi_2 \\ &= \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{L} + \frac{6}{L}\left(\frac{\varphi_2 + \varphi_1}{2} - \frac{w_2 - w_1}{L}\right)\xi. \end{aligned} \tag{3.49}$$

Zdefiniujmy teraz ważne dla dalszych rozważań oznaczenia:

$$\varepsilon_x^{(e)} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{u_2 - u_1}{L}, \tag{3.50}$$

$$\varkappa_z^{(e)} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{L}, \tag{3.51}$$

$$\chi_z^{(e)} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{6}{L}\left(\frac{\varphi_2 + \varphi_1}{2} - \frac{w_2 - w_1}{L}\right). \tag{3.52}$$

Konfrontując powyższe trzy wielkości z formułami (3.43), (3.49), widać, że w jednoznaczny i kompletny sposób określają one stan odkształcenia w całym elemencie skończonym (obciążonym w węzłach) o funkcjach kształtu (3.40), (3.41). Służyć zatem mogą do zapisu informacji o odkształceniu elementu ramy płaskiej, a więc stanowić będą składowe

[11)] Parametryzacja ta różni się od zazwyczaj wykorzystywanej w przypadku elementów prętowych. Uzasadnienie takiego wyboru zostanie podane w następnym podrozdziale.

odkształceniowej macierzy wpływu. Zauważmy przy okazji, że czynnik $(w_2 - w_1)/L$ występujący w definicji (3.52) opisuje kąt infinitezymalnego obrotu osi łączącej oba węzły elementu.

Wykazaliśmy, że odkształcenia uogólnione (3.43), (3.49) belki obciążonej w węzłach mają postać wielomianów stopnia co najwyżej pierwszego względem parametru ξ, przy czym odkształcenia podłużne są stałe na całym elemencie:

$$\epsilon_x^{(e)}(\xi) = \text{const} = \varepsilon_x^{(e)}, \tag{3.53}$$

natomiast krzywizna jest liniową funkcją parametru ξ:

$$\kappa_z^{(e)}(\xi) = \varkappa_z^{(e)} + \chi_z^{(e)}\xi. \tag{3.54}$$

Współczynniki $\varkappa_z^{(e)}$ i $\chi_z^{(e)}$ to **parametry deformacji zgięciowej** (czy też **krzywiznowej**) elementu ramy płaskiej, zaś $\varepsilon_x^{(e)}$ jest **parametrem odkształcenia podłużnego**.

W analogiczny sposób można określić parametr opisujący odkształcenie postaciowe w elemencie, w którym nie stosujemy założenia Bernoulliego. Jak się okazuje odkształcenie to w elemencie skończonym ramy płaskiej również jest stałe:

$$\rho_y^{(e)}(\xi) = \text{const} = \varrho_y^{(e)}, \tag{3.55}$$

przy czym można łatwo wykazać, że parametr $\varrho_y^{(e)}$ je opisujący nie jest parametrem niezależnym. Przyczyną tego jest wielokrotnie już wspominany fakt, iż w belce nie można zrealizować stanu czystego ścinania, gdyż – dla zachowania równowagi – ścinaniu zawsze towarzyszyć musi pewien rodzaj zginania. Otóż **parametr odkształcenia postaciowego** w sposób jednoznaczny powiązany jest z jednym z paramaterów deformacji krzywiznowej, a mianowicie:

$$\varrho_y^{(e)} = -\chi_z^{(e)}. \tag{3.56}$$

Zatem znając parametry (3.51), (3.52), mamy w całym elemencie określone nie tylko odkształcenia zgięciowe (3.54), ale również odkształcenia postaciowe (3.55).

Wielkości (3.50)–(3.52) grupujemy w **wektor parametrów deformacji** elementu ramy płaskiej:

$$\boldsymbol{\varepsilon}^{(e)} \overset{\text{def}}{=} \begin{bmatrix} \varepsilon_x^{(e)} \\ \varkappa_z^{(e)} \\ \chi_z^{(e)} \end{bmatrix}. \tag{3.57}$$

Znając wartości tych parametrów dla konkretnego elementu, możemy określić uogólnione odkształcenia w dowolnym jego punkcie $\xi \in \langle -1\,, +1 \rangle$, bowiem wektor uogólnionych odkształceń elementu ramy płaskiej (3.46) można przedstawić jako kombinację liniową, której współczynnikami są właśnie składowe wektora $\boldsymbol{\varepsilon}^{(e)}$:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\epsilon}^{(e)}(\xi) &= \varepsilon_x^{(e)}\, \boldsymbol{\epsilon}_1^{(e)}(\xi) + \varkappa_z^{(e)}\, \boldsymbol{\epsilon}_2^{(e)}(\xi) + \chi_z^{(e)}\, \boldsymbol{\epsilon}_3^{(e)}(\xi) \\ &= \begin{bmatrix} \boldsymbol{\epsilon}_1^{(e)}(\xi) & \boldsymbol{\epsilon}_2^{(e)}(\xi) & \boldsymbol{\epsilon}_3^{(e)}(\xi) \end{bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}^{(e)} = \mathbf{N}_{\boldsymbol{\epsilon\varepsilon}}^{(e)}(\xi)\, \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}^{(e)}.\end{aligned} \tag{3.58}$$

Występujące w powyższym wyrażeniu wektory $\boldsymbol{\epsilon}_i^{(e)}(\xi)$ $(i = 1, 2, 3)$ stanowią swego rodzaju bazę odkształceń:

$$\mathbf{N}_{\boldsymbol{\epsilon\varepsilon}}^{(e)}(\xi) \stackrel{\text{def}}{=} \left[\boldsymbol{\epsilon}_i^{(e)}(\xi)\right], \qquad i = 1, 2, 3. \tag{3.59}$$

Dla $\boldsymbol{\epsilon}^{(e)}(\xi)$ określonego definicją $(3.46)_2$ mają one – zgodnie z równaniami (3.53), (3.54) – następującą postać:

$$\boldsymbol{\epsilon}_1^{(e)}(\xi) = \text{const} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{\epsilon}_2^{(e)}(\xi) = \text{const} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{\epsilon}_3^{(e)}(\xi) = \begin{bmatrix} 0 \\ \xi \end{bmatrix}. \tag{3.60}$$

Dla $\boldsymbol{\epsilon}^{(e)}(\xi)$ według $(3.46)_1$ (tj., gdy nie pomijamy odkształceń postaciowych) dodatkowo uwzględnimy związki (3.55), (3.56) – i wtedy:

$$\boldsymbol{\epsilon}_1^{(e)}(\xi) = \text{const} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{\epsilon}_2^{(e)}(\xi) = \text{const} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{\epsilon}_3^{(e)}(\xi) = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ \xi \end{bmatrix}. \tag{3.61}$$

Wektory te można nazwać **deformacjami bazowymi** elementu skończonego ramy płaskiej – każde odkształcenie tego elementu, będące wynikiem dowolnych przemieszczeń i obrotów jego węzłów, można bowiem złożyć z tych stanów bazowych, zgodnie ze wzorem (3.58). Każda z tych deformacji bazowych jednoznacznie opisana jest również przez odpowiedni wektor wektor parametrów deformacji, tzn.:

$$\boldsymbol{\epsilon}^{(e)}(\xi) \equiv \boldsymbol{\epsilon}_i^{(e)}(\xi) \quad (i = 1, 2, 3) \quad \Longleftrightarrow \quad \boldsymbol{\varepsilon}^{(e)} = \boldsymbol{\varepsilon}_i^{(e)} \quad (i = \varepsilon, \varkappa, \chi), \tag{3.62}$$

gdzie

$$\boldsymbol{\varepsilon}_\varepsilon^{(e)} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{\varepsilon}_\varkappa^{(e)} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{\varepsilon}_\chi^{(e)} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \tag{3.63}$$

natomiast odpowiednie wektory uogólnionych przemieszczeń węzłowych odpowiadające tym deformacjom nie mogą być określone jednoznacznie. Są one określone z dokładnością do ruchów sztywnych, o czym więcej w następnym podrozdziale, gdzie zostanie przedstawione ich wyprowadzenie. Oto definicje tych wektorów:

$$\mathbf{q}_\varepsilon^{(e)} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{L}{2} \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{q}_\varkappa^{(e)} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{L}{2} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{q}_\chi^{(e)} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{L^3}{6(L^2+4)} \begin{bmatrix} 0 \\ 2/L \\ 1 \\ 0 \\ -2/L \\ 1 \end{bmatrix}. \tag{3.64}$$

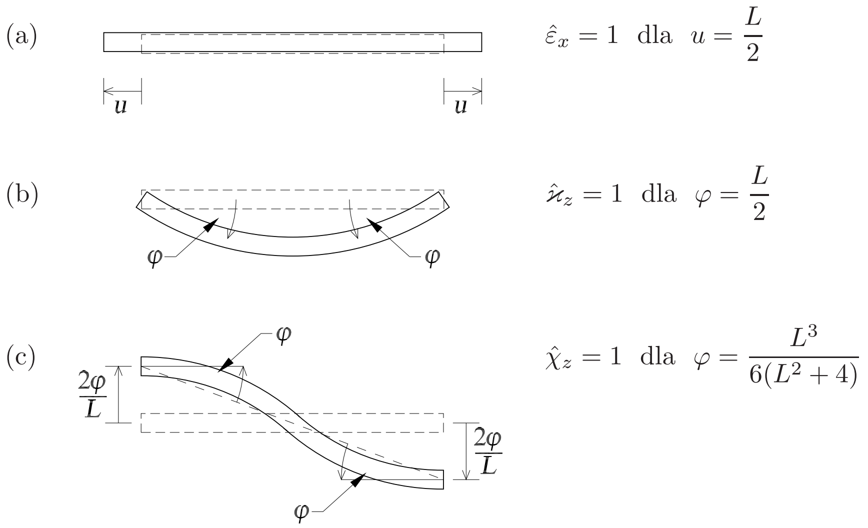
Występujące w powyższych definicjach mnożniki (odpowiednio)

$$\frac{L}{2}, \quad \frac{L}{2}, \quad \frac{L^3}{6(L^2+4)} \tag{3.65}$$

mają na celu otrzymanie wartości jednostkowych odpowiednich składowych wektora deformacji (3.57), a więc zgodnie z definicjami (3.63). Oznacza to, że wektory te opisują przemieszczenia i obroty węzłów elementu belkowego, które powodują odkształcenia zdefiniowane jako jednostkowe – czyli, że spełnione są związki

$$\mathbf{B}^{(e)}(\xi)\,\mathbf{q}_i^{(e)} = \mathbf{N}_{\epsilon\boldsymbol{\varepsilon}}^{(e)}(\xi)\,\boldsymbol{\varepsilon}_i^{(e)} = \boldsymbol{\epsilon}_i^{(e)}(\xi), \qquad i = \varepsilon, \varkappa, \chi. \tag{3.66}$$

Deformacje bazowe zilustrowano na rys. 3.6. Zauważmy, że deformacja bazowa $\boldsymbol{\epsilon}_1$ opisuje stan *czystego osiowego rozciągania* elementu (rys. 3.6(a)), zaś deformacja $\boldsymbol{\epsilon}_2$ opisuje stan *czystego zginania* (rys. 3.6(b)). Deformacja $\boldsymbol{\epsilon}_3$ natomiast, określa wygięcie elementu antysymetryczne względem jego środka, przy czym zginaniu temu towarzyszy ścinanie – stąd stan ten nazywać będziemy *zginaniem ze ścinaniem*. Ścinanie to jest takie samo w każdym punkcie elementu, co w przypadku, gdy rezygnujemy z założenia Bernoulliego, oznacza niezerowe, ale stałe odkształcenia postaciowe. Tak wyginany (i ścinany) pręt ma kształt "esowaty" (rys. 3.6(c)), z punktem przegięcia (tj. punktem o zerowej krzywiźnie) w środku elementu, czyli dla $\xi = 0$.



Rys. 3.6. Podstawowe deformacje elementu ramy płaskiej: (a) czyste rozciąganie osiowe, (b) czyste zginanie, (c) zginanie antysymetryczne względem środka elementu (zginanie ze ścinaniem). Deformacje te tworzą *ortogonalną bazę* dla dowolnego stanu odkształcenia elementu skończonego. Jak zostanie pokazane w podrozdziale 3.6, są to tzw. *stany deformacji własnych* dla tego elementu skończonego.

Składowe wektora parametrów deformacji (3.57) można w pewien sposób zinterpretować. Wiadomo oczywiście, że zgodnie z równaniem (3.53) wielkość $\varepsilon_x^{(e)}$ to po prostu odkształcenie podłużne w dowolnym punkcie belki; mniej trywialne interpretacje mają pozostałe dwa parametry, które opisują deformację krzywiznową. Otóż z wzoru (3.54) wynika, że składowa $\varkappa_z^{(e)}$ to krzywizna w środku elementu e, czyli dla $\xi = 0$:

$$\varkappa_z^{(e)} = \kappa_z^{(e)}(0). \tag{3.67}$$

Będzie ona określać krzywiznę w dowolnym punkcie belki tylko w stanie czystego zginania (tj., gdy $\chi_z^{(e)} = 0$). Z kolei wartość parametru $\chi_z^{(e)}$ związana jest z różnicą pomiędzy

krzywiznami występującymi na końcach elementu:

$$\chi_z^{(e)} = \frac{\kappa_z^{(e)}(1) - \kappa_z^{(e)}(-1)}{2}. \tag{3.68}$$

Pamiętajmy również o związku tego parametru z odkształceniem postaciowym (równanie (3.56)). Wreszcie zauważmy, że krzywizny na obu końcach elementu dadzą w się przedstawić jako – odpowiednio – suma (dla $\xi = 1$) oraz różnica (dla $\xi = -1$) parametrów odkształcenia zgięciowego:

$$\kappa_z^{(e)}(1) = \varkappa_z^{(e)} + \chi_z^{(e)}, \qquad \kappa_z^{(e)}(-1) = \varkappa_z^{(e)} - \chi_z^{(e)}. \tag{3.69}$$

3.5.1. Typy dystoryjne i dystorsje jednostkowe

Dowolne wstępne odkształcenie nałożone na wyizolowany element skończony spowoduje w ogólnym przypadku obroty i względne przesunięcia węzłów tego elementu. Element ten stanowi fragment konstrukcji, zatem istnieją pewne stany wstępnych translacji i obrotów przekrojów przywęzłowych, które zrealizują wpływ na konstrukcję dowolnego lokalnego odkształcenia wstępnego[12)]. Jak stwierdziliśmy jednak wektor parametrów deformacji (3.57) w jednoznaczny i kompletny sposób opisuje odkształcenie elementu ramy płaskiej, którego węzły uległy translacjom i obrotom. Zatem lokalna różnica pomiędzy dowolnym odkształceniem wstępnym, a odkształceniem związanym z tymi samymi przemieszczeniami węzłowymi, ale opisywalnym przez wektor parametrów odkształcenia (3.57) jest zupełnie nieistotna dla rozwiązania układu równań MES i jeśli istnieje taka potrzeba można ją uwzględnić już po rozwiązaniu tego układu, rozpatrując lokalną równowagę, siły wewnętrzne i odkształcenie elementu skończonego o wyznaczonych wartościach uogólnionych sił i przemieszczeń węzłowych, przy zadanym obciążeniu i wstępnym odkształceniu całego elementu (efektywnie da się wykorzystać tutaj zasadę superpozycji). W praktyce ograniczymy się więc tylko do takich wstępnych odkształceń czy też dystorsji, które można opisać wektorem analogicznym do (3.57), a mianowicie:

$$\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}^{(e)} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{bmatrix} \hat{\varepsilon}_x^{(e)} \\ \hat{\varkappa}_z^{(e)} \\ \hat{\chi}_z^{(e)} \end{bmatrix}. \tag{3.70}$$

Jeżeli potraktujemy tak zdefiniowany **wektor odkształceń wstępnych** jako wektor określający dystorsję to można uznać, iż jego składowe opisują pewne **typy dystorsji** charakterystyczne dla określonego elementu skończonego (w tym przypadku jest to element skończony ramy płaskiej).

W płaskim elemencie ramowym będziemy zatem wyróżniać następujące rodzaje wstępnych deformacji (rys. 3.6):

- **dystorsja podłużna**, której wartość określa składowa $\hat{\varepsilon}_x^{(e)}$,

[12)] Zwróćmy tutaj uwagę na analogię z obciążeniem przywęzłowym realizującym wpływ na węzły konstrukcji obciążenia zadanego na całym elemencie.

- **dystorsja czystego zginania**, określona przez składową $\hat{\varkappa}_z^{(e)}$,
- **dystorsja zginania antysymetrycznego** (zginania ze ścinaniem), określona przez składową $\hat{\chi}_z^{(e)}$.

Są to ortogonalne stany bazowe dla możliwego odkształcenia dystorsyjnego elementu skończonego ramy płaskiej. Będą więc one stanowić podstawę do zdefiniowania **dystorsji jednostkowych** dla tego elementu, niezbędnych przy obliczaniu macierzy wpływu dla ustroju, w którym takie elementy występują. Zatem w przypadku elementu ramy płaskiej wyróżniamy trzy typy dystorsji jednostkowych o następującej postaci (patrz (3.63)):

$$\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_{\varepsilon}^{(e)} = \boldsymbol{\varepsilon}_{\varepsilon}^{(e)}, \qquad \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_{\varkappa}^{(e)} = \boldsymbol{\varepsilon}_{\varkappa}^{(e)}, \qquad \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_{\chi}^{(e)} = \boldsymbol{\varepsilon}_{\chi}^{(e)}. \tag{3.71}$$

Jak widać możemy mówić o dystorsji jednostkowej podłużnej, dystorsji jednostkowej czystego zginania i zginania antysymetrycznego. Każde z powyższych wstępnych odkształceń jednostkowych realizowane jest przez (określony z dokładnością do ruchów sztywnych) odpowiedni wektor uogólnionych przemieszczeń węzłowych (patrz (3.64)):

$$\hat{\mathbf{q}}_{\varepsilon}^{(e)} = \mathbf{q}_{\varepsilon}^{(e)} \qquad \hat{\mathbf{q}}_{\varkappa}^{(e)} = \mathbf{q}_{\varkappa}^{(e)}, \qquad \hat{\mathbf{q}}_{\chi}^{(e)} = \mathbf{q}_{\chi}^{(e)}. \tag{3.72}$$

Wektory te opisują przemieszczenia i obroty węzłów elementu belkowego, które w swobodnym elemencie spowodują odkształcenia zdefiniowane jako jednostkowe.

3.6. Zagadnienie własne macierzy sztywności

W poprzednim podrozdziale określiliśmy podstawowe stany deformacji elementu skończonego ramy płaskiej opierając się na analizie aproksymacji funkcjami kształtu pól odkształceń w obszarze elementu. Stany te tworzą ortogonalną bazę dla wszelkich możliwych deformacji tego elementu. Można zauważyć, że rezultaty przeprowadzonego postępowania zależą od przyjętej parametryzacji – dla innej parametryzacji otrzymalibyśmy inną, równorzędną bazę. Pokażemy jednak teraz, że otrzymane stany deformacji są stanami własnymi rozpatrywanego elementu skończonego – w sensie rozwiązania jego *zagadnienia własnego*.

Rozpatrzmy zagadnienie własne macierzy sztywności elementu skończonego:

$$\mathbf{K}^{(e)}\mathbf{q}^{(e)} = \lambda\, \mathbf{q}^{(e)}, \qquad \mathbf{q}^{(e)} = ? \tag{3.73}$$

Skalar λ jest pewnym mnożnikiem skalującym wektor $\mathbf{q}^{(e)}$. Poszukujemy zatem takich kierunków $\mathbf{q}^{(e)}$, które nie są obracane przez macierz $\mathbf{K}^{(e)}$ (tzn. w wyniku transformacji otrzymujemy wektor współliniowy z zadanym). Równanie powyższe sprowadzamy do postaci układu jednorodnego:

$$\left(\mathbf{K}^{(e)} - \lambda\,\mathbf{I}\right)\mathbf{q}^{(e)} = \mathbf{0}, \tag{3.74}$$

który oczywiście ma jednoznaczne rozwiązanie zerowe. Dla nietrywialnego przypadku, gdy $\mathbf{q}^{(e)} \neq \mathbf{0}$ istnieje niejednoznaczne rozwiązanie o ile macierz główna układu (3.74) jest osobliwa, czyli gdy

$$\det\left(\mathbf{K}^{(e)} - \lambda\,\mathbf{I}\right) = 0. \tag{3.75}$$

Jest to względem zmiennej λ wielomian stopnia równego wymiarowi macierzy $\mathbf{K}^{(e)}$, a więc stopnia 6-go w przypadku macierzy sztywności dwuwęzłowego elementu skończonego ramy płaskiej. Pierwiastki tego wielomianu to *wartości własne* macierzy $\mathbf{K}^{(e)}$, natomiast odpowiadające im wektory są jej *wektorami własnymi*. Macierz sztywności jest macierzą symetryczną, zatem wszystkie pierwiastki równania (3.75) będą rzeczywiste. Dla macierzy (3.18) otrzymujemy sześć wartości własnych, spośród których trzy są niezerowe:

$$\lambda_1 = \frac{2EA}{L}, \qquad \lambda_2 = \frac{2EJ_z}{L}, \qquad \lambda_3 = \frac{6\,(L^2+4)\,EJ_z}{L^3}, \tag{3.76}$$

a odpowiadające im wektory własne mają następującą postać:

$$\mathbf{q}_1^{(e)} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{q}_2^{(e)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{q}_3^{(e)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2/L \\ 1 \\ 0 \\ -2/L \\ 1 \end{bmatrix}. \tag{3.77}$$

Te wektory węzłowych przemieszczeń uogólnionych opisują (z dokładnością do mnożnika skalującego) trzy deformacje przedstawione na rys. 3.6, gdyż:

$$\begin{aligned} \mathbf{B}^{(e)}(\xi)\,\mathbf{q}_1^{(e)} &= \frac{2}{L}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{2}{L}\,\boldsymbol{\epsilon}_1^{(e)}(\xi), \\ \mathbf{B}^{(e)}(\xi)\,\mathbf{q}_2^{(e)} &= \frac{2}{L}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{2}{L}\,\boldsymbol{\epsilon}_2^{(e)}(\xi), \\ \mathbf{B}^{(e)}(\xi)\,\mathbf{q}_3^{(e)} &= \frac{L^3}{6(L^2+4)}\begin{bmatrix} 0 \\ \xi \end{bmatrix} = \frac{L^3}{6(L^2+4)}\,\boldsymbol{\epsilon}_3^{(e)}(\xi), \end{aligned} \tag{3.78}$$

gdzie $\boldsymbol{\epsilon}_i^{(e)}(\xi)$ $(i = 1, 2, 3)$ są określone według (3.63). Nazywać je będziemy **deformacjami własnymi** elementu skończonego. Łatwo zauważyć, że w celu otrzymania deformacji jednostkowych (3.60), wektory (3.77) musimy przeskalować wykorzystując mnożniki (3.65). Przypomnijmy wszakże, że jeśli $\mathbf{q}^{(e)}$ jest wektorem własnym macierzy $\mathbf{K}^{(e)}$ dla wartości własnej λ, to również $\tilde{\mathbf{q}}^{(e)} = \alpha\,\mathbf{q}^{(e)}$ jest wektorem własnym odpowiadającym tej samej wartości własnej[13)]. Można więc powiedzieć, iż wektory własne (3.77) w specyficzny sposób normujemy – tak, aby generowały wektory parametrów deformacji o odpowiednich składowych jednostkowych. Otrzymujemy zatem przeskalowane wektory wraz z odpowiadającymi im wartościami własnymi:

$$\mathbf{q}_\varepsilon^{(e)} = \frac{L}{2}\,\mathbf{q}_1^{(e)}, \qquad \mathbf{q}_\varkappa^{(e)} = \frac{L}{2}\,\mathbf{q}_2^{(e)}, \qquad \mathbf{q}_\chi^{(e)} = \frac{6\,(L^2+4)}{L^3}\,\mathbf{q}_3^{(e)}, \tag{3.79}$$

$$\lambda_\varepsilon = \frac{L}{2}\,\lambda_1 = EA, \qquad \lambda_\varkappa = \frac{L}{2}\,\lambda_2 = EJ_z, \qquad \lambda_\chi = \frac{L^3}{6\,(L^2+4)}\,\lambda_3 = EJ_z. \tag{3.80}$$

13) Dowód jest bardzo prosty – wykorzystując założenia: $\tilde{\mathbf{q}}^{(e)} = \alpha\,\mathbf{q}^{(e)}$ oraz $\mathbf{K}^{(e)}\mathbf{q}^{(e)} = \lambda\,\mathbf{q}^{(e)}$, przekształcamy: $\mathbf{K}^{(e)}\tilde{\mathbf{q}}^{(e)} = \mathbf{K}^{(e)}\left(\alpha\,\mathbf{q}^{(e)}\right) = \alpha\,\mathbf{K}^{(e)}\mathbf{q}^{(e)} = \alpha\,\lambda\,\mathbf{q}^{(e)} = \lambda\left(\alpha\,\mathbf{q}^{(e)}\right) = \lambda\,\tilde{\mathbf{q}}^{(e)}$, q.e.d.

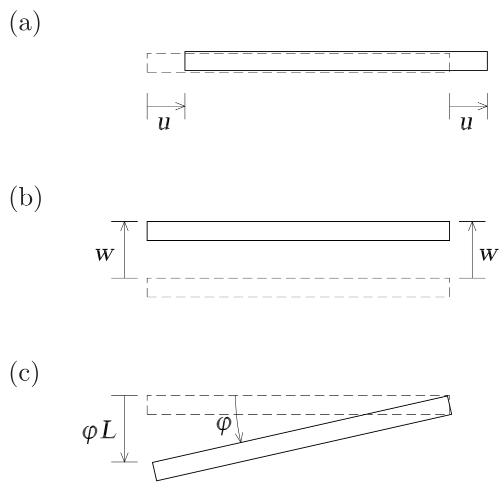
Pozostają jeszcze trzy *zerowe* wartości własne ($\lambda_4 = \lambda_5 = \lambda_6 = 0$), którym odpowiadają następujące wektory przemieszczeń węzłowych

$$\mathbf{q}_4^{(e)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{q}_5^{(e)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{q}_6^{(e)} = \begin{bmatrix} 0 \\ -L \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}. \tag{3.81}$$

Łatwo wykazać, że wektory te nie generują w elemencie żadnego stanu odkształcenia, tzn.:

$$\mathbf{B}^{(e)}(\xi)\,\mathbf{q}_i^{(e)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad i \; = 4, 5, 6. \tag{3.82}$$

Opisują one ruchy sztywne elementu ramy: translacje w dwóch prostopadłych kierunkach, oraz infinitezymalny obrót w płaszyźnie belki. Przedstawiono je na rys. 3.7.



RYS. 3.7. Ruchy sztywne elementu ramy płaskiej: (a) translacja pozioma (u – dowolne), (b) translacja pionowa (w – dowolne), (c) obrót infinitezymalny (φ – dowolnie małe).

Jeszcze raz pokazaliśmy, że dowolny stan odkształcenia dwuwęzłowego elementu skończonego ramy płaskiej można przedstawić w postaci kombinacji liniowej trzech deformacji własnych. Staje się to od razu oczywiste, gdy dokona się następującego spostrzeżenia. Liczba stopni swobody elementu ramy wynosi 6 (po dwa przemieszczenia i obrót każdego z obu węzłów). Na płaszczyźnie są trzy ruchy sztywne elementu (dwa przesunięcia i jeden obrót o infinitezymalny kąt). Pozostają zatem, $6 - 3 = 3$, trzy bazowe stany odkształcenia elementu ramy płaskiej, określone jednoznacznie przez wektory uogólnionych przemieszczeń węzłowych, które można otrzymać z rozwiązania zagadnienia własnego macierzy sztywności tego elementu.

Ogólny sposób postępowania dla dowolnego elementu skończonego w celu określenia jego podstawowych stanów deformacji powinien zatem polegać na rozwiązaniu zagad-

nienia własnego jego macierzy sztywności[14]. Istotne są wektory własne odpowiadające niezerowym wartościom własnym (a więc po odrzuceniu wektorów przemieszczeń węzłowych, które opisują ruchy sztywne[15]). Wektory te opisują ortogonalne składowe stanu odkształcenia danego elementu, a więc w naturalny sposób definiują typy dystorsji, które można na niego nałożyć. Pamiętajmy, że za dystorsję uznajemy dowolną liniową kombinację tych stanów, natomiast otrzymane w rezultacie rozwiązania problemu własnego deformacje własne powinno się wykorzystać do zdefiniowania dystorsji jednostkowych (w tym celu odpowiednio je skalując).

3.7. Składowe uogólnionych sił wewnętrznych i obciążenia kompensacyjne

Podobnie jak w przypadku, gdy analizowaliśmy odkształcenia, przyjmijmy teraz, że rozpatrywany przez nas dwuwymiarowy element belkowy jest obciążony tylko w węzłach. Wtedy rozkłady pól sił przekrojowych mają charakter funkcji (co najwyżej) liniowych względem współrzędnej x, a w przyjętej przez nas parametryzacji można je przedstawić w postaci:

$$N_x^{(e)}(\xi) = \text{const} = N^{(e)}_{x\,\text{const}}, \tag{3.83}$$

$$M_z^{(e)}(\xi) = M^{(e)}_{z\,\text{const}} + M^{(e)}_{z\,\text{asym}}\,\xi, \tag{3.84}$$

$$T_y^{(e)}(\xi) = \text{const} = T^{(e)}_{y\,\text{const}}, \tag{3.85}$$

przy czym wielkości $T^{(e)}_{y\,\text{const}}$ i $M^{(e)}_{z\,\text{asym}}$ powiązane są zależnością:

$$T^{(e)}_{y\,\text{const}} = -\frac{2}{L}\,M^{(e)}_{z\,\text{asym}}, \tag{3.86}$$

która wynika z równania równowagi (3.9), przy uwzględnieniu faktu, że w przypadku obciążenia węzłowego: $m_z(\xi) \equiv 0$. Dysponujemy zatem trzema niezależnymi wielkościami w jednoznaczny sposób opisującymi rozkład sił wewnętrznych w elemencie ramy płaskiej – są to: $N^{(e)}_{x\,\text{const}}$, $M^{(e)}_{z\,\text{const}}$ oraz $T^{(e)}_{y\,\text{const}}$ albo $M_{z\,\text{asym}} = -T^{(e)}_{y\,\text{const}}L/2$. Wielkości te nazywać będziemy składowymi **wektora sił wewnętrznych** elementu skończonego ramy płaskiej,

[14] Pojawiają się tutaj oczywiście pewne dodatkowe aspekty, jak na przykład duża ilość stanów deformacji własnych dla elementów o dużej liczbie stopni swobody, czy brak analitycznych formuł dla elementów, których macierz sztywności otrzymano w wyniku całkowania numerycznego. Z kolei w przypadku elementów izoparametrycznych, gdzie nie jest nawet określony dokładny kształt, macierz sztywności jest całkowana numerycznie każdorazowo dla konkretnego elementu – zatem również zagadnienie własne musi być rozwiązywane numerycznie i osobno dla każdego elementu.

[15] Pewien problem mogą stanowić tzw. elementy niedostosowane, w których pewne kombinacje uogólnionych przemieszczeń węzłowych związane z ruchami sztywnymi powodują jednak wystąpienie niektórych niezerowych parametrów (zwykle mniej istotnych) odkształceń uogólnionych.

który definiujemy w postaci:

$$\mathbf{S}^{(e)} = \begin{bmatrix} N^{(e)}_{x\,\mathrm{const}} \\ M^{(e)}_{z\,\mathrm{const}} \\ M^{(e)}_{z\,\mathrm{asym}} \end{bmatrix}. \tag{3.87}$$

Jak widać w wektorze tym zgrupowaliśmy wielkości potrzebne do opisu właściwych sił wewnętrznych (czyli siły osiowej i momentu zginającego). Pamiętać jednak należy o jednoznacznym związku, który łączy składową $M^{(e)}_{z\,\mathrm{asym}}$ z przekrojową siłą poprzeczną. Składowa $N^{(e)}_{x\,\mathrm{const}}$ to oczywiście siła podłużna opisująca uogólnione naprężenia będące wynikiem stanu rozciągania lub ściskania osiowego. Składowa $M^{(e)}_{z\,\mathrm{const}}$ opisuje część momentu zginającego odpowiedzialną za czyste zginanie elementu ramy – w łuk o stałej krzywiźnie. Natomiast wielkość $M_{z\,\mathrm{asym}}$ związana jest ze ścinaniem pręta ramy, któremu nieodzownie towarzyszy zginanie asymetryczne względem jego środka – jak pamiętamy, tak ścinany i wyginany pręt ma kształt "esowaty", z punktem przegięcia (tj. punktem o zerowej krzywiźnie) w środku elementu, czyli dla $\xi = 0$. Stany odkształcenia związane z tymi składowymi właściwych sił wewnętrznych to oczywiście deformacje własne elementu skończonego przedstawione na rys. 3.6. Odkształcenia i siły wewnętrzne powiązane są zależnościami

$$N^{(e)}_x(\xi) = EA\,\epsilon^{(e)}_x(\xi) = \mathrm{const} = EA\,\varepsilon^{(e)}_x, \tag{3.88}$$

$$M^{(e)}_z(\xi) = EJ_z\,\kappa^{(e)}_z(\xi) = EJ_z\left(\varkappa^{(e)}_z + \chi^{(e)}_z\xi\right). \tag{3.89}$$

Jak widać składowe wektora sił przekrojowych zależne są od składowych wektora odkształcenia w następujący sposób:

$$N^{(e)}_{x\,\mathrm{const}} = EA\,\varepsilon^{(e)}_x, \tag{3.90}$$

oraz

$$M^{(e)}_{z\,\mathrm{const}} = EJ_z\,\varkappa^{(e)}_z, \qquad M^{(e)}_{z\,\mathrm{asym}} = EJ_z\,\chi^{(e)}_z. \tag{3.91}$$

Analogiczne zależności można napisać dla stanów dystorsji i uogólnionych naprężeń wewnętrznych, które powstaną w przypadku elementu całkowicie utwierdzonego w węzłach:

$$\hat{N}^{(e)}_{x\,\mathrm{const}} = EA\,\hat{\varepsilon}^{(e)}_x, \tag{3.92}$$

$$\hat{M}^{(e)}_{z\,\mathrm{const}} = EJ_z\,\hat{\varkappa}^{(e)}_z, \quad \hat{M}^{(e)}_{z\,\mathrm{asym}} = EJ_z\,\hat{\chi}^{(e)}_z, \tag{3.93}$$

oraz oczywiście

$$\hat{T}^{(e)}_{y\,\mathrm{asym}} = -\frac{2}{L}\hat{M}^{(e)}_{z\,\mathrm{asym}} = -\frac{2}{L}EJ_z\,\hat{\chi}^{(e)}_z. \tag{3.94}$$

Bazując na powyższych związkach, można teraz pokazać, że dystorsja podłużna (tj., gdy: $\hat{\varepsilon}^{(e)}_x$ – dowolne, $\hat{\varkappa}^{(e)}_z = \hat{\chi}^{(e)}_z = 0$) realizowana jest przez następujące kompensacyjne siły węzłowe:

$$\hat{N}_1 = \hat{N}^{(e)}_{x\,\mathrm{const}}, \quad \hat{N}_2 = -\hat{N}^{(e)}_{x\,\mathrm{const}}, \qquad \hat{T}_1 = \hat{T}_2 = \hat{M}_1 = \hat{M}_2 = 0. \tag{3.95}$$

Z kolei dystorsję czystego zginania (tzn.: $\hat{\varkappa}_z^{(e)}$ – dowolne, $\hat{\varepsilon}_x^{(e)} = \hat{\chi}_z^{(e)} = 0$) realizują obciążenia

$$\hat{N}_1 = \hat{N}_2 = \hat{T}_1 = \hat{T}_2 = 0, \qquad \hat{M}_1 = -\hat{M}^{(e)}_{z\,\mathrm{const}}, \quad \hat{M}_2 = \hat{M}^{(e)}_{z\,\mathrm{const}}, \tag{3.96}$$

zaś dystorsję zginania asymetrycznego (tzn.: $\hat{\chi}_z^{(e)}$ – dowolne, $\hat{\varepsilon}_x^{(e)} = \hat{\varkappa}_z^{(e)} = 0$) wywołujemy przykładając

$$\hat{N}_1 = \hat{N}_2 = 0, \qquad \hat{T}_1 = -\hat{T}^{(e)}_{y\,\mathrm{asym}}, \quad \hat{T}_2 = \hat{T}^{(e)}_{y\,\mathrm{asym}}, \qquad \hat{M}_1 = \hat{M}_2 = \hat{M}^{(e)}_{z\,\mathrm{asym}}. \tag{3.97}$$

Superponując powyższe obciążenia kompensacyjne (3.95)-(3.97), otrzymamy ekwiwalentny wektor obciążeń węzłowych realizujący w elemencie dystorsję będącą superpozycją odkształceń wstępnych:

$$\hat{\mathbf{Q}}^{(e)} = \begin{bmatrix} \hat{N}_1 \\ \hat{T}_1 \\ \hat{M}_1 \\ \hat{N}_2 \\ \hat{T}_2 \\ \hat{M}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\hat{N}^{(e)}_{x\,\mathrm{const}} \\ -\hat{T}^{(e)}_{y\,\mathrm{asym}} \\ -\hat{M}^{(e)}_{z\,\mathrm{const}} + \hat{M}^{(e)}_{z\,\mathrm{asym}} \\ \hat{N}^{(e)}_{x\,\mathrm{const}} \\ \hat{T}^{(e)}_{y\,\mathrm{asym}} \\ \hat{M}^{(e)}_{z\,\mathrm{const}} + \hat{M}^{(e)}_{z\,\mathrm{asym}} \end{bmatrix} \quad \text{dla} \quad \hat{\boldsymbol{\varepsilon}} = \begin{bmatrix} \hat{\varepsilon}_x^{(e)} \\ \hat{\varkappa}_z^{(e)} \\ \hat{\chi}_z^{(e)} \end{bmatrix}. \tag{3.98}$$

Łatwo zauważyć, że powyższy kompensacyjny wektor obciążeń węzłowych, $\hat{\mathbf{Q}}^{(e)}$, opisuje samorównoważący się układ sił.

Dla dystorsji jednostkowych otrzymujemy co następuje:

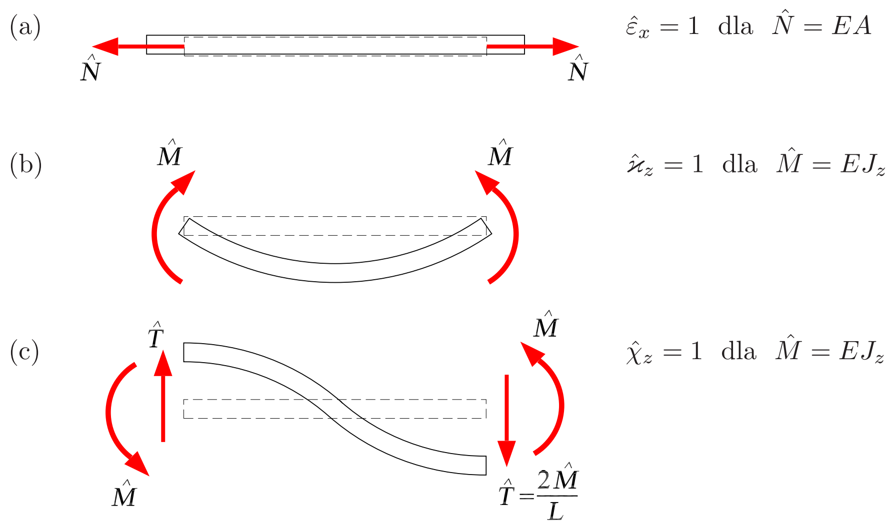
- dla $\hat{\boldsymbol{\varepsilon}} = \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_\varepsilon$, mamy: $\hat{\varepsilon}_x^{(e)} = 1$ (pozostałe składowe są zerowe), więc: $N^{(e)}_{x\,\mathrm{const}} = EA$ (pozostałe składowe są zerowe), zatem: $\hat{\mathbf{Q}}^{(e)} = \hat{\mathbf{Q}}^{(e)}_\varepsilon$,
- dla $\hat{\boldsymbol{\varepsilon}} = \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_\varkappa$, mamy: $\varkappa_z^{(e)} = 1$ (pozostałe składowe są zerowe), więc: $M^{(e)}_{z\,\mathrm{const}} = EJ_z$ (pozostałe składowe są zerowe), zatem: $\hat{\mathbf{Q}}^{(e)} = \hat{\mathbf{Q}}^{(e)}_\varkappa$,
- dla $\hat{\boldsymbol{\varepsilon}} = \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_\chi$, mamy: $\chi_z^{(e)} = 1$ (pozostałe składowe są zerowe), więc: $M^{(e)}_{z\,\mathrm{asym}} = EJ_z$ (pozostałe składowe są zerowe), zatem: $\hat{\mathbf{Q}}^{(e)} = \hat{\mathbf{Q}}^{(e)}_\chi$,

gdzie wektory węzłowych obciążeń kompensacyjnych mają następującą postać:

$$\hat{\mathbf{Q}}^{(e)}_\varepsilon \stackrel{\mathrm{def}}{=} EA \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad \hat{\mathbf{Q}}^{(e)}_\varkappa \stackrel{\mathrm{def}}{=} EJ_z \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad \hat{\mathbf{Q}}^{(e)}_\chi \stackrel{\mathrm{def}}{=} EJ_z \begin{bmatrix} 0 \\ 2/L \\ 1 \\ 0 \\ -2/L \\ 1 \end{bmatrix}. \tag{3.99}$$

Te samorównoważace się układy obciążenia elementu przedstawiono na rys. 3.8. Zauważmy jeszcze, że powyższe wektory obciążeń można wyznaczyć korzystając ze związków opisujących równowagę elementu skończonego:

$$\hat{\mathbf{Q}}^{(e)}_i = \mathbf{K}^{(e)} \hat{\mathbf{q}}^{(e)}_i \qquad (i = \varepsilon, \varkappa, \chi). \tag{3.100}$$



Rys. 3.8. Obciążenia kompensacyjne dla stanów dystorsji (jednostkowych) w elemencie ramy płaskiej: (a) rozciąganie osiowe, (b) czyste zginanie, (c) zginanie asymetryczne.

Wektory przemieszczeń wezłowych dla dystorsji jednostkowych, $\hat{\mathbf{q}}_i^{(e)}$ $(i = \varepsilon, \varkappa, \chi)$, zdefiniowane są przez równania (3.72) oraz (3.64).

3.8. Wektor odkształceń i wektor wpływu oraz wektor sił wewnętrznych

Uogólnione odkształcenia wszystkich elementów konstrukcji grupujemy w **wektor odkształceń konstrukcji** w ten sposób, że składowe wektorów odkształcenia kolejnych elementów stanowią uporządkowaną kolumnę – zatem:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \left[\varepsilon_i\right] = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}^{(1)} \\ \boldsymbol{\varepsilon}^{(2)} \\ \vdots \\ \boldsymbol{\varepsilon}^{(N)} \end{bmatrix}, \tag{3.101}$$

gdzie N jest liczbą elementów. Jeżeli konstrukcja składa się wyłącznie z płaskich elementów ramowych[16)] to wektor ten ma wymiar $(3N) \times 1$, natomiast jego składowe można określić w postaci zależnej od składowych odkształcenia poszczególnych elementów w na-

[16)] W opracowanym programie `MES+MDW` konstrukcja może składać się z różnych elementów skończonych. Współpraca elementów ze sobą jest uzyskana poprzez przypisywanie elementom wspólnych węzłów, bądź wprowadzanie więzów wewnętrznych pomiędzy węzłami (tzw. "sklejanie" stopni swobody). Wszystkie globalne algorytmy MES (np. agregacja macierzy sztywności itp.) oraz MDW, działają niezależnie od wykorzystanych *konkretnych* elementów, gdyż te muszą spełniać kryteria *abstrakcyjnego* elementu skończonego.

stępujący sposób:

$$\varepsilon_i = \begin{cases} \varepsilon_x^{(e)} & \text{dla} \quad i = 3e-2, \\ \varkappa_z^{(e)} & \text{dla} \quad i = 3e-1, \\ \chi_z^{(e)} & \text{dla} \quad i = 3e, \end{cases} \tag{3.102}$$

przy czym $e = 1, \ldots, N$, a więc $i = 1, \ldots, 3N$.

Odkształceniowy **wektor wpływu** to wektor odkształceń wyznaczony dla określonej jednostkowej dystorsji wirtualnej, która wymusza deformację konstrukcji. Często potrzebujemy superponować tylko stany związane z pewnymi typami odkształcenia, bądź też dotyczące tylko niektórych elementów. Wtedy wektor wpływu stanowić będzie fragment pełnego wektora odkształcenia konstrukcji (3.101).

Składowe uogólnionych sił wewnętrznych elementów konstrukcji zapisujemy łącznie w postaci **wektora sił wewnętrznych konstrukcji** *konsekwentnie* z wektorem odkształcenia (3.101), a więc:

$$\mathbf{S} = \left[S_i\right] = \begin{bmatrix} \mathbf{S}^{(1)} \\ \mathbf{S}^{(2)} \\ \vdots \\ \mathbf{S}^{(N)} \end{bmatrix}. \tag{3.103}$$

Oznacza to, że iloczyn skalarny tych dwóch wektorów da w wyniku całkowitą *energię sprężystą* układu (tj. pracę uogólnionych sił wewnętrznych[17)] na odkształceniach sprężystych):

$$W_{\mathrm{spr}} = \mathbf{S}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{\varepsilon} = \sum_i S_i \, \varepsilon_i. \tag{3.104}$$

Dla konstrukcji o wyłącznie płaskich elementach ramowych liczba składowych wektora (3.103) wynosić będzie $3N$, a ich zależność od składowych sił wewnętrznych poszczególnych elementów można przedstawić w postaci:

$$S_i = \begin{cases} N_{x\,\mathrm{const}}^{(e)} & \text{dla} \quad i = 3e-2, \\ M_{z\,\mathrm{const}}^{(e)} & \text{dla} \quad i = 3e-1, \\ M_{z\,\mathrm{asym}}^{(e)} & \text{dla} \quad i = 3e. \end{cases} \tag{3.105}$$

3.9. Macierz wpływu ramy płaskiej

Algorytm wyznaczania macierzy wpływu dla konstrukcji składającej się z dowolnych elementów skończonych przedstawiono w rozdziale 2.3.5. Wyznaczana według tego algorytmu kompletna odkształceniowa macierz wpływu konstrukcji składającej się wyłącznie

[17)] Zatem są to składowe *właściwych* sił wewnętrznych, tzn. mających odpowiedniki w postaci uogólnionych odkształceń.

z płaskich elementów ramowych będzie mieć wymiar $(3N) \times (3N)$ i postać:

$$\mathbf{D} = \begin{array}{c} \begin{matrix} \hat{\varepsilon}_1 = 1 & \hat{\varepsilon}_2 = 1 & \cdots & \hat{\varepsilon}_{3N} = 1 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}^{(1)} & \boldsymbol{\varepsilon}^{(1)} & \cdots & \boldsymbol{\varepsilon}^{(1)} \\ \boldsymbol{\varepsilon}^{(2)} & \boldsymbol{\varepsilon}^{(2)} & \cdots & \boldsymbol{\varepsilon}^{(2)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \boldsymbol{\varepsilon}^{(N)} & \boldsymbol{\varepsilon}^{(N)} & \cdots & \boldsymbol{\varepsilon}^{(N)} \end{bmatrix} \end{array} = \begin{array}{c} \begin{matrix} \hat{\varepsilon}_x^{(1)} = 1 & \hat{\varkappa}_z^{(1)} = 1 & \cdots & \hat{\chi}_z^{(N)} = 1 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} \varepsilon_x^{(1)} & \varepsilon_x^{(1)} & \cdots & \varepsilon_x^{(1)} \\ \varkappa_z^{(1)} & \varkappa_z^{(1)} & \cdots & \varkappa_z^{(1)} \\ \chi_z^{(1)} & \chi_z^{(1)} & \cdots & \chi_z^{(1)} \\ \varepsilon_x^{(2)} & \varepsilon_x^{(2)} & \cdots & \varepsilon_x^{(2)} \\ \varkappa_z^{(2)} & \varkappa_z^{(2)} & \cdots & \varkappa_z^{(2)} \\ \chi_z^{(2)} & \chi_z^{(2)} & \cdots & \chi_z^{(2)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \chi_z^{(N)} & \chi_z^{(N)} & \cdots & \chi_z^{(N)} \end{bmatrix} \end{array}, \qquad (3.106)$$

gdzie poszczególne kolumny są wektorami odkształceń konstrukcji obliczonymi dla kolejnych stanów dystorsji jednostkowych $\hat{\varepsilon}_i = 1$. Jak widać kolejność składowych odkształcenia w wierszach macierzy odpowiada wstępnych odkształceń (dystorsji) jednostkowych.

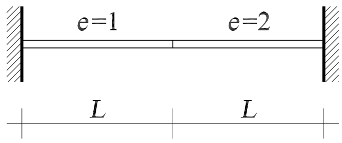
Odkształceniowa macierz wpływu dowolnej ramy płaskiej o dwóch elementach belkowych i jednym elemencie kratowym ma wymiar 7×7, gdyż na pręcie kratowym wstępne odkształcenie (dystorsję) wymusić można tylko na jeden sposób i obliczana jest na nim tylko jedna składowa odkształcenia – zatem:

$$\mathbf{D} = \begin{array}{c} \begin{matrix} \hat{\varepsilon}_x^{(1)} = 1 & \hat{\varkappa}_z^{(1)} = 1 & \cdots & \hat{\varepsilon}_x^{(3)} = 1 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} \varepsilon_x^{(1)} & \varepsilon_x^{(1)} & \cdots & \varepsilon_x^{(1)} \\ \varkappa_z^{(1)} & \varkappa_z^{(1)} & \cdots & \varkappa_z^{(1)} \\ \chi_z^{(1)} & \chi_z^{(1)} & \cdots & \chi_z^{(1)} \\ \varepsilon_x^{(2)} & \varepsilon_x^{(2)} & \cdots & \varepsilon_x^{(2)} \\ \varkappa_z^{(2)} & \varkappa_z^{(2)} & \cdots & \varkappa_z^{(2)} \\ \chi_z^{(2)} & \chi_z^{(2)} & \cdots & \chi_z^{(2)} \\ \varepsilon_x^{(3)} & \varepsilon_x^{(3)} & \cdots & \varepsilon_x^{(3)} \end{bmatrix} \end{array}. \qquad (3.107)$$

3.9.1. Macierze wpływu przykładowych ram płaskich

Poniżej prezentujemy dwa przykłady macierzy wpływu obliczonych dla prostych konstrukcji ramowych. Prostota pierwszej konstrukcji pozwala na przedstawienie obliczeń analitycznych, natomiast drugi przykład stanowi prosty test dla algorytmu numerycznego.

Przykład 3.1: Dana jest rama płaska o jednym węźle swobodnym, składająca się z dwóch elementów skończonych o takiej samej długości (rys. 3.9). Dla uproszczenia przyjmijmy ponadto, że materiał oraz charakterystyki geometrii przekroju są dla obu prętów identyczne, tzn.: $E^{(1)} = E^{(2)} \equiv E$, $A^{(1)} = A^{(2)} \equiv A$, $J_z^{(1)} = J_z^{(2)} \equiv J_z$.



Rys. 3.9. Belka dwuelementowa.

Obciążenie kompensacyjne dla dowolnego stanu deformacji wstępnych sprowadza się do obciążenia jedynego swobodnego węzła tego prostego ustroju. Widać, że wstępne wydłużenie dowolnego z elementów nie wprowadza w tej konstrukcji żadnych odkształceń zgięciowych, czyli $\kappa_z^{(1)}(\xi) = \kappa_z^{(2)}(\xi) \equiv 0$, natomiast odkształcenia podłużne są stałe i dla odpowiednich podłużnych dystorsji jednostkowych równe:

$$\text{dla}\ \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_\varepsilon^{(1)}: \quad \epsilon_x^{(1)}(\xi) = \frac{1}{2}, \qquad \epsilon_x^{(2)}(\xi) = -\frac{1}{2},$$
$$\text{dla}\ \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_\varepsilon^{(2)}: \quad \epsilon_x^{(1)}(\xi) = -\frac{1}{2}, \qquad \epsilon_x^{(2)}(\xi) = \frac{1}{2}.$$

Z kolei dla pozostałych stanów dystorsji jednostkowych odkształcenia podłużne w obu elementach są zerowe, $\epsilon_x^{(1)}(\xi) = \epsilon_x^{(2)}(\xi) \equiv 0$, w przeciwieństwie do deformacji krzywiznowych, które wynoszą (odpowiednio):

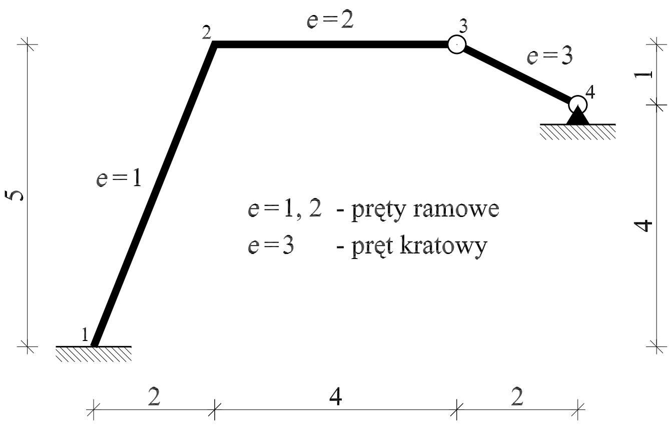
$$\text{dla}\ \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_\varkappa^{(1)}: \quad \kappa_z^{(1)}(\xi) = \frac{1}{8} + \frac{3}{8}\xi, \qquad \kappa_z^{(2)}(\xi) = -\frac{1}{8} + \frac{3}{8}\xi,$$
$$\text{dla}\ \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_\chi^{(1)}: \quad \kappa_z^{(1)}(\xi) = \frac{1}{8} + \frac{7}{8}\xi, \qquad \kappa_z^{(2)}(\xi) = -\frac{1}{8} - \frac{1}{8}\xi,$$
$$\text{dla}\ \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_\varkappa^{(2)}: \quad \kappa_z^{(1)}(\xi) = -\frac{1}{8} - \frac{3}{8}\xi, \qquad \kappa_z^{(2)}(\xi) = \frac{1}{8} - \frac{3}{8}\xi,$$
$$\text{dla}\ \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_\chi^{(2)}: \quad \kappa_z^{(1)}(\xi) = \frac{1}{8} - \frac{1}{8}\xi, \qquad \kappa_z^{(2)}(\xi) = -\frac{1}{8} + \frac{7}{8}\xi.$$

Zatem kompletna macierz wpływu ma postać:

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} & 0 & -\frac{1}{8} & \frac{1}{8} \\ 0 & \frac{3}{8} & \frac{7}{8} & 0 & -\frac{3}{8} & -\frac{1}{8} \\ -\frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{8} & -\frac{1}{8} & 0 & \frac{1}{8} & -\frac{1}{8} \\ 0 & \frac{3}{8} & -\frac{1}{8} & 0 & -\frac{3}{8} & \frac{7}{8} \end{bmatrix}.$$

Jak łatwo zauważyć, w tej konstrukcji ramowej, z racji wzajemnego usytuowania elementów, stan odkształceń podłużnych jest niezależny od stanu odkształceń zgięciowych, co uwydatnia się również w macierzy wpływu.

Przykład 3.2: Rozpatrzmy trójelementową ramę płaską przedstawioną na rys. 3.10. Jak widać element nr 3 powinien być traktowany jak pręt kratownicy. Zatem kompletna macierz wpływu dla takiej konstrukcji będzie miała wymiary 7×7 i postać (3.107).



RYS. 3.10. Trójelementowa rama płaska.

Przyjmujemy następujące liczbowe wartości dla charakterystyk geometrycznych i materiałowych poszczególnych elementów:

$$A^{(1)} = 2{,}28 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{m}^2, \qquad A^{(2)} = 1{,}06 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{m}^2, \qquad A^{(3)} = 1{,}06 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{m}^2,$$

$$J_z^{(1)} = 9{,}35 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{m}^4, \qquad J_z^{(2)} = 1{,}71 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{m}^4,$$

$$E^{(1)} = E^{(2)} = E^{(2)} = 2{,}1 \cdot 10^{11}\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}^2} \quad \text{(stal)}.$$

Odkształceniowa macierz wpływu wynosi wtedy:

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix}
9{,}9999894\mathrm{E}{-1} & -5{,}6954560\mathrm{E}{-5} & 1{,}1390912\mathrm{E}{-5} & 8{,}4609570\mathrm{E}{-6} & -8{,}4609570\mathrm{E}{-6} & 2{,}8203190\mathrm{E}{-6} & 5{,}2880981\mathrm{E}{-6} \\
-1{,}3888385\mathrm{E}{-2} & 2{,}5208760\mathrm{E}{-1} & 1{,}4958248\mathrm{E}{-1} & 1{,}1110708\mathrm{E}{-1} & -1{,}1110708\mathrm{E}{-1} & 3{,}7035692\mathrm{E}{-2} & 6{,}9441923\mathrm{E}{-2} \\
8{,}3330307\mathrm{E}{-3} & 4{,}4874744\mathrm{E}{-1} & 9{,}1025051\mathrm{E}{-1} & -6{,}6664246\mathrm{E}{-2} & 6{,}6664246\mathrm{E}{-2} & -2{,}2221415\mathrm{E}{-2} & -4{,}1665154\mathrm{E}{-2} \\
2{,}4501207\mathrm{E}{-5} & 1{,}3194304\mathrm{E}{-3} & -2{,}6388607\mathrm{E}{-4} & 9{,}9980399\mathrm{E}{-1} & 1{,}9600965\mathrm{E}{-4} & -6{,}5336551\mathrm{E}{-5} & -1{,}2250603\mathrm{E}{-4} \\
-1{,}5187883\mathrm{E}{-2} & -8{,}1789251\mathrm{E}{-1} & 1{,}6357850\mathrm{E}{-1} & 1{,}2150306\mathrm{E}{-1} & 8{,}7849694\mathrm{E}{-1} & 4{,}0501020\mathrm{E}{-2} & 7{,}5939413\mathrm{E}{-2} \\
1{,}5187883\mathrm{E}{-2} & 8{,}1789251\mathrm{E}{-1} & -1{,}6357850\mathrm{E}{-1} & -1{,}2150306\mathrm{E}{-1} & 1{,}2150306\mathrm{E}{-1} & 9{,}5949898\mathrm{E}{-1} & -7{,}5939413\mathrm{E}{-2} \\
2{,}7393182\mathrm{E}{-5} & 1{,}4751680\mathrm{E}{-3} & -2{,}9503360\mathrm{E}{-4} & -2{,}1914546\mathrm{E}{-4} & 2{,}1914546\mathrm{E}{-4} & -7{,}3048485\mathrm{E}{-5} & 9{,}9986303\mathrm{E}{-1}
\end{bmatrix}.$$

Zauważmy pewną korelację występującą pomiędzy wierszami 5 i 6 obliczonej macierzy, którą można potraktować jako pewien test poprawności wykonanych obliczeń. Otóż suma tych wierszy dla kolumn $j = 1, 2, 3, 4, 7$ jest zerowa: $D_{5j} + D_{6j} = 0$, natomiast dla $j = 5, 6$ (tj. dla kolumn, w których umieszczone są wektory wpływu obliczone dla stanów dystorsji krzywiznowych nałożonych na element $e = 2$) mamy: $D_{5j} + D_{6j} = 1$. Jest tak dlatego, że (zgodnie ze wzorem $(3.69)_1$) suma ta opisuje krzywiznę elementu $e = 2$ w węźle 3, a ten przyprzegubowy przekrój może się swobodnie obracać. Ponadto zauważmy, że składowe na diagonali są dodatnie i mniejsze od jedności.

3.10. Modelowanie defektów i modyfikacje parametrów projektowych w płaskich elementach ramowych

Właściwości konstrukcyjne elementu liniowo-sprężystej ramy płaskiej można określić podając dwa parametry – są to:

- sztywność (względnie podatność) podłużna, tj. sztywność elementu na osiowe rozciąganie lub ściskanie,
- sztywność (względnie podatność) zgięciowa, tj. sztywność elementu na zginanie w płaszczyźnie ramy.

Dodatkowym parametrem jest smukłość pręta ramy. Parametr ten jest istotny, gdy rozpatruje się zjawisko wyboczenia i tutaj nie będziemy go uwzględniać.

Współczynnik określający **sztywność podłużną** elementu e ramy ma postać:

$$k_{EA}^{(e)} \stackrel{\text{def}}{=} E^{(e)} A^{(e)}, \tag{3.108}$$

którą znamy z konstrukcji kratowych. Przyjmijmy teraz analogiczne oznaczenie określające **sztywność zgięciową** elementu ramy:

$$k_{EJ}^{(e)} \stackrel{\text{def}}{=} E^{(e)} J_z^{(e)}. \tag{3.109}$$

Jak widać z definicji oba współczynniki zależą od modułu Younga liniowo-sprężystego materiału belki oraz od charakterystyk geometrycznych jej przekroju. Odpowiadające tym sztywnością podatności są $1/k_{EA}^{(e)}$, $1/k_{EJ}^{(e)}$.

Zdefiniujmy teraz jeszcze następujące dwie wielkości:

$$\mu_{EA}^{(e)} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\hat{k}_{EA}^{(e)}}{k_{EA}^{(e)}}, \qquad \mu_{EJ}^{(e)} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\hat{k}_{EJ}^{(e)}}{k_{EJ}^{(e)}}, \tag{3.110}$$

które wyrażają stosunek zmodyfikowanych współczynników sztywności $\hat{k}_{EA}^{(e)}$, $\hat{k}_{EJ}^{(e)}$ do odpowiednich sztywności pierwotnych elementu niezmodyfikowanego. Są to więc **współczynniki zmiany sztywności** belki. Jako parametry zagadnienia optymalizacji topologii konstrukcji (przeprojektowywanie, "*remodelling*") te nieujemne wielkości nie są bezpośrednio ograniczane z góry, natomiast w problemie modelowania defektów oczywistym wydaje się nałożenie na nie ograniczenia określonego przez przedział $\langle 0\,,1\rangle$, co oznacza przyjęcie postulatu, że defekt związany jest ze zmniejszeniem się sztywności elementu.

Współczynniki sztywności $k_{EA}^{(e)}$ i $k_{EJ}^{(e)}$ są niezależnymi parametrami charakteryzującymi element ramy płaskiej. Modyfikacja jednego z tych parametrów nie musi być związana z modyfikacją drugiego. Przykładowo zmiana przekroju polegająca tylko na jego deformacji (czyli przy założeniu, że $A^{(e)} = \text{const}$) może prowadzić do zmiany jego sztywności zgięciowej (związanej ze zmianą momentu bezwładności przekroju $J_z^{(e)}$), natomiast sztywność podłużna pozostanie niezmieniona. Łatwo można nawet wyobrazić sobie taką zmianę przekroju elementu ramy, w wyniku której jego sztywność w stanie odkształceń podłużnych zmaleje, natomiast sztywność zgięciowa wzrośnie. W najbardziej ogólnym przypadku można więc przyjąć, że zmiana szywności podłużnej i zmiana sztywności zgięciowej

są całkowicie niezależne i traktujemy je jako modyfikacje niezależne. Takie podejście może być odpowiednie dla zagadnienia optymalnego przeprojektowywania („*remodellingu*"). Zakładając jednak, że modyfikacja jest wynikiem powstałego defektu należy stwierdzić, że w praktyce, tzn. przy rzeczywistych uszkodzeniach elementu, obie sztywności są skorelowane. Niejednoznaczność opisu tej korelacji nie powinna zmuszać nas do jej nieuwzględnienia. Z pewnością na przykład nie należy pomijać następującej zależności

$$k_{EA}^{(e)} = 0 \iff k_{EJ}^{(e)} = 0, \tag{3.111}$$

która mówi, że oba (z definicji nieujemne) parametry sztywnościowe mogą być zerowe tylko jednocześnie (co oznacza, że uszkodzenie belki powodujące całkowity brak możliwości przenoszenia przez nią obciążeń osiowych wiąże się z niemożnością pracy w stanie zgięciowym i na odwrót czyli, że element jest całkowicie wyeliminowany z konstrukcji). Nie dopuszczamy zatem uszkodzenia, które (przykładowo) przekształca element belkowy w cięgno lub tworzy na nim idealny przegub plastyczny.

Wydaje się, iż można często przyjąć zależność między współczynnikami zmiany sztywności w postaci funkcyjnej:

$$\mu_{EA}^{(e)} = f_{\text{kor}}\left(\mu_{EJ}^{(e)}\right), \tag{3.112}$$

przy czym funkcja korelacji f_{kor} powinna być ciągłą funkcją rosnącą spełniającą dodatkowo warunki:

$$\begin{cases} f_{\text{kor}}(\mu) \geqslant 0 \quad \forall \mu \geqslant 0, \\ f_{\text{kor}}(\mu) = 0 \iff \mu = 0. \end{cases} \tag{3.113}$$

Jak już stwierdzono funkcja ta nie może być przyjęta arbitralnie, gdyż zależy ona nie tylko od geometrii przekroju poprzecznego belki, lecz również od dopuszczalnych sposobów jego uszkodzenia. W celu jej określenia należy zdecydować się na pewien konkretny model uszkodzenia, który oczywiście w możliwie najlepszy sposób przybliża wpływ rzeczywistych defektów.

Rozpatrzmy istotny przypadek belek o prostokątnym przekroju poprzecznym o szerokości b i wysokości h. Pole przekroju i moment bezwładności wynoszą wtedy odpowiednio:

$$A^{(e)} = b\,h, \qquad J_z^{(e)} = \frac{b\,h^3}{12}. \tag{3.114}$$

Rzeczywiste uszkodzenie takiego elementu ramy modelujemy przyjmując następujące założenia i kolejne przybliżenia upraszczające:

- uszkodzenie polega na zmniejszeniu się efektywnej powierzchni przekroju poprzecznego belki, przy czym przez powierzchnię efektywną rozumiemy tę część przekroju, która jest w stanie przenosić naprężenia;
- przekrój najbardziej uszkodzony (o najmniej efektywnej powierzchni) jest przyjmowany jako charakterystyczny dla całego elementu belkowego;
- uszkodzenie przekroju nie zaburza w sposób istotny jego symetrii, ani nie zmienia istotnie jego osi głównych bezwładności;

- przyjmujemy zatem, że uszkodzony element przybliżany jest belką o przekroju prostokątnym, pomniejszonym symetrycznie względem obu osi głównych.

Finalne przybliżenie oznacza, że uszkodzony element ma przekrój o zmodyfikowanych wymiarach $\hat{b} \times \hat{h}$, gdzie:

$$\begin{aligned} \hat{b} &= b - \Delta b = \lambda_b b, \\ \hat{h} &= h - \Delta h = \lambda_h h, \end{aligned} \tag{3.115}$$

przy czym oczywiście $\lambda_b = (1 - \Delta b/b) \in \langle 0\,,1\rangle$ oraz $\lambda_h = (1 - \Delta h/h) \in \langle 0\,,1\rangle$. Wprowadzone tutaj wielkości λ_b, λ_h opisują **modyfikacje parametrów konstrukcyjnych** jakimi są wymiary przekroju belki. Modyfikacje te w jednoznaczny sposób wpływają na wielkość współczynnika zmiany sztywności elementu. Stwierdziliśmy z kolei, że parametry sztywnościowe w jedynie istotny sposób charakteryzują każdy element konstrukcji i przyjęliśmy postulat, że wszelkie uszkodzenia czy modyfikacje elementu są zauważalne tylko poprzez zmianę jego sztywności. Mogłoby się więc wydawać, że bezpośrednio należy odwoływać się tylko do nich. Łatwo jednak zauważyć, że posługiwanie się wyłącznie parametrami zmiany sztywności narzuca pewne ograniczenia. Odwoływanie się do bardziej ogólnych wielkości opisujących zmianę konkretnych parametrów konstrukcyjnych (projektowych) jest znacznie wygodniejsze i daje dodatkowe możliwości[18). Podejście to i jego zalety zostaną w pełni zaprezentowane w następnym rozdziale.

Rozpatrzmy teraz dwa charakterystyczne przypadki, gdy wymiary zmodyfikowanego przekroju wynoszą odpowiednio $\hat{b} \times h$ oraz $b \times \hat{h}$. Pierwszy z nich uwzględnia zmianę szerokości belki i jest równoważny prostemu podejściu, w którym wpływ defektu modelujemy jako zmianę modułu Younga: $\hat{E}^{(e)} = \lambda_b E^{(e)}$. Wtedy wywołane defektem modyfikacje obu współczynników sztywności są identyczne:

$$\mu_{EA}^{(e)} = \mu_{EJ}^{(e)} = \lambda_b, \tag{3.116}$$

czyli funkcja korelacji jest tożsamościowa, $f_{\mathrm{kor}}(\mu) = \mu$. Natomiast w drugim przypadku dopuszczamy tylko modyfikację wysokości przekroju, która w różnym stopniu wpływa na sztywności podłużną i zgięciową:

$$\mu_{EA}^{(e)} = \lambda_h, \qquad \mu_{EJ}^{(e)} = \lambda_h^3, \tag{3.117}$$

czyli $f_{\mathrm{kor}}(\mu) = \mu^3$,

$$\mu_{EA}^{(e)} = \left(\mu_{EJ}^{(e)}\right)^3. \tag{3.118}$$

Ogólny przypadek, gdy w modelu uszkodzenia dopuszczamy zwężenie przekroju na obu kierunkach prowadzi nas do następujących zależności na współczynniki modyfikacji sztywności:

$$\mu_{EA}^{(e)} = \lambda_b\,\lambda_h, \qquad \mu_{EJ}^{(e)} = \lambda_b\,\lambda_h^3. \tag{3.119}$$

18) Jedną z podstawowych zalet tego podejścia jest łatwiejsze operowanie na pewnym poziomie abstrakcji (tj. niezależnie od rodzaju elementu skończonego i związanej z tym ilości i rodzajów dystorsji, współczynników sztywności itd.), dzięki czemu możliwym staje się opracowanie algorytmów MDW dla konstrukcji składającej się z dowolnych elementów skończonych.

W zależności od stosunku wielkości λ_b i λ_h zawsze jednak

$$\mu_{EA}^{(e)} \in \left\langle \left(\mu_{EJ}^{(e)}\right)^3, \, \mu_{EJ}^{(e)} \right\rangle. \tag{3.120}$$

Można zatem przyjąć model

$$\mu_{EA}^{(e)} = \left(\mu_{EJ}^{(e)}\right)^{\alpha}, \qquad \alpha \in \langle 1\,, 3\rangle. \tag{3.121}$$

Dobór współczynnika potęgowego α warunkuje ocena w jakim stopniu uszkodzenie wpływa na stan deformacji podłużnej i stan krzywiznowej. Zauważmy jednak, że ponieważ $\mu_{EJ}^{(e)} \in \langle 0\,, 1\rangle$ to $\mu_{EA}^{(e)} \leqslant \mu_{EJ}^{(e)}$ czyli, że przyjęty model uszkodzenia przekroju wpływa znaczniej na zmniejszenie się sztywności zgięciowej belki, a co najwyżej w tym samym stopniu na zmianę sztywności podłużnej.

3.11. Związki pomiędzy składowymi dystorsji a modyfikacjami współczynników sztywności

3.11.1. Stan uogólnionych naprężeń i odkształceń w sprężonym dystorsjami elemencie ramy płaskiej

Odkształcenia uogólnione w parametryzacji bezwymiarowej elementu skończonego ramy płaskiej opisane są przez funkcje (3.53), (3.54), gdzie składowe uogólnionych odkształceń zdefiniowaliśmy w postaci (3.50)-(3.52). W przypadku wstępnego sprężenia elementu e dystorsjami, $\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}^{(e)} = \left[\hat{\varepsilon}_x^{(e)} \; \hat{\varkappa}_z^{(e)} \; \hat{\chi}_z^{(e)}\right]^{\mathrm{T}}$, wielkości te składają się z części liniowej (zależnej od obciążenia zwenętrznego) i rezydualnej (będącej wynikiem sprężenia):

$$\varepsilon_x^{(e)} = \overset{\mathrm{L}}{\varepsilon}{}_x^{(e)} + \overset{\mathrm{R}}{\varepsilon}{}_x^{(e)}, \qquad \varkappa_z^{(e)} = \overset{\mathrm{L}}{\varkappa}{}_z^{(e)} + \overset{\mathrm{R}}{\varkappa}{}_z^{(e)}, \qquad \chi_z^{(e)} = \overset{\mathrm{L}}{\chi}{}_z^{(e)} + \overset{\mathrm{R}}{\chi}{}_z^{(e)}. \tag{3.122}$$

W liniowym związku konstytutywnym pomiędzy siłami wewnętrznymi i odkształceniami pojawia się zatem czynnik nieliniowy – wstępne odkształcenia dystorsyjne. Siły podłużne wyglądają teraz następująco:

$$N_x^{(e)}(\xi) = k_{EA}^{(e)}\left[\varepsilon_x^{(e)} - \hat{\varepsilon}_x^{(e)}\right] = k_{EA}^{(e)}\,\overset{\mathrm{L}}{\varepsilon}{}_x^{(e)} + k_{EA}^{(e)}\left[\overset{\mathrm{R}}{\varepsilon}{}_x^{(e)} - \hat{\varepsilon}_x^{(e)}\right] = \overset{\mathrm{L}}{N}{}_{x\,\mathrm{const}}^{(e)} + \overset{\mathrm{R}}{N}{}_{x\,\mathrm{const}}^{(e)}, \tag{3.123}$$

natomiast wykonujący pracę na odkształceniach krzywiznowych moment zginający ma postać:

$$\begin{aligned} M_z^{(e)}(\xi) &= k_{EJ}^{(e)}\left[\kappa_z^{(e)}(\xi) - \hat{\kappa}_z^{(e)}(\xi)\right] = k_{EJ}^{(e)}\,\overset{\mathrm{L}}{\kappa}{}_z^{(e)}(\xi) + k_{EJ}^{(e)}\left[\overset{\mathrm{R}}{\kappa}{}_z^{(e)}(\xi) - \hat{\kappa}_z^{(e)}(\xi)\right] \\ &= k_{EJ}^{(e)}\left(\overset{\mathrm{L}}{\varkappa}{}_z^{(e)} + \overset{\mathrm{L}}{\chi}{}_z^{(e)}\,\xi\right) + k_{EJ}^{(e)}\left[\left(\overset{\mathrm{R}}{\varkappa}{}_z^{(e)} - \hat{\varkappa}_z^{(e)}\right) + \left(\overset{\mathrm{R}}{\chi}{}_z^{(e)} - \hat{\chi}_z^{(e)}\right)\xi\right] \\ &= \overset{\mathrm{L}}{M}{}_{z\,\mathrm{const}}^{(e)} + \overset{\mathrm{L}}{M}{}_{z\,\mathrm{asym}}^{(e)}\xi + \overset{\mathrm{R}}{M}{}_{z\,\mathrm{const}}^{(e)} + \overset{\mathrm{R}}{M}{}_{z\,\mathrm{asym}}^{(e)}\xi. \end{aligned} \tag{3.124}$$

Jak widać, dla składowych uogólnionych sił wewnętrznych również wyróżniliśmy część liniową i rezydualną.

Występujące w powyższych formułach rezydualne części odkształcenia są wynikiem wprowadzenia stanów dystorsynych i dla konkretnych wartości dystorsji możemy je wyznaczyć wykorzystując odkształceniową macierz wpływu:

$$\overset{\mathrm{R}}{\varepsilon}{}_x^{(e)} = \sum_{j\in\mathcal{D}} D_{i_{(e,\varepsilon)}j}\,\hat{\varepsilon}_j, \qquad \overset{\mathrm{R}}{\varkappa}{}_z^{(e)} = \sum_{j\in\mathcal{D}} D_{i_{(e,\varkappa)}j}\,\hat{\varepsilon}_j, \qquad \overset{\mathrm{R}}{\chi}{}_z^{(e)} = \sum_{j\in\mathcal{D}} D_{i_{(e,\chi)}j}\,\hat{\varepsilon}_j. \tag{3.125}$$

gdzie indeksy i zależą od elementu e oraz typu dystorsji. Występujące we wzorach (3.123), (3.124) rezydualne części naprężeń uogólnionych zależą od różnic pomiędzy rezydualnymi odkształceniami, a dystorsjami. Wykorzystując informację zmagazynowaną w macierzy wpływu możemy je obliczać:

$$\left.\begin{array}{l} \overset{\mathrm{R}}{\varepsilon}{}_x^{(e)} - \hat{\varepsilon}_x^{(e)} \\ \overset{\mathrm{R}}{\varkappa}{}_z^{(e)} - \hat{\varkappa}_z^{(e)} \\ \overset{\mathrm{R}}{\chi}{}_z^{(e)} - \hat{\chi}_z^{(e)} \end{array}\right\} = \sum_{j\in\mathcal{D}} \left(D_{ij} - \delta_{ij}\right)\hat{\varepsilon}_j \quad \text{dla (odpowiednio)} \quad \begin{cases} i = i(e,\varepsilon), \\ i = i(e,\varkappa), \\ i = i(e,\chi). \end{cases} \tag{3.126}$$

Stosowany tutaj zapis $i = i(e, \text{typ dystorsji})$, określający lokalizację dystorsyjną, nie jest wygodny. Szczęśliwie, nie ma potrzeby go kontynuować, gdyż począwszy od rozdziału 4 wszelkie sformułowania podane będą w globalnym układzie odniesienia konstrukcji, abstrahującym od tworzących ją elementów skończonych.

3.11.2. Dystorsja podłużna a zmiana sztywności podłużnej

W przypadku prostoliniowowego pręta belkowego rozpatrywanego przy założeniu liniowości geometrycznej stan rozciągania (ściskania) i stan zginania są od siebie całkowicie niezależne, zatem dystorsje krzywiznowe nie będą *bezpośrednio* wpływać na stan odkształcenia podłużnego – mogą (i zwykle będą[19)]) na niego wpływać tylko pośrednio poprzez udział we wstępnym sprężeniu konstrukcji. W przypadku stanu rozciągania postulat zgodności ustroju modelowanego dystorsjami z ustrojem zmodyfikowanym prowadzi nas do prezentowanego już wcześniej w przypadku elementów kratowych równania:

$$k_{EA}^{(e)}\left(\varepsilon_x^{(e)} - \hat{\varepsilon}_x^{(e)}\right) = \hat{k}_{EA}^{(e)}\,\varepsilon_x^{(e)}, \tag{3.127}$$

skąd wyznaczamy wielkość zmiany współczynnika sztywności podłużnej:

$$\mu_{EA}^{(e)} = \frac{\hat{k}_{EA}^{(e)}}{k_{EA}^{(e)}} = \frac{\varepsilon_x^{(e)} - \hat{\varepsilon}_x^{(e)}}{\varepsilon_x^{(e)}}. \tag{3.128}$$

lub modelującą ją dystorsję wirtualną:

$$\hat{\varepsilon}_x^{(e)} = \left(1 - \mu_{EA}^{(e)}\right)\varepsilon_x^{(e)}, \tag{3.129}$$

przy czym pamiętamy, że formuły te stanowią związek nieliniowy względem dystorsji, gdyż odkształcenia całkowite również (w powyższych formułach – niejawnie) od nich zależą

$$\varepsilon_x^{(e)} = \varepsilon_x^{(e)}\left(\ldots, \hat{\varepsilon}_x^{(e)}, \ldots\right). \tag{3.130}$$

[19)] Wyjątkiem są tylko specyficzne konstrukcje, jak na przykład przedstawiona w przykładzie 3.1.

3.11.3. Dystorsje krzywiznowe a zmiana sztywności zgięciowej

Dla stanu zginania belki płaskiej postulat identyczności uogólnionych odkształceń i sił wewnętrznych konstrukcji zmodyfikowanej z konstrukcją modelowaną dystorsjami prowadzi do równania:

$$k_{EJ}^{(e)}\left[\varkappa_z^{(e)} - \hat{\varkappa}_z^{(e)} + \left(\chi_z^{(e)} - \hat{\chi}_z^{(e)}\right)\xi\right] = \hat{k}_{EJ}^{(e)}\left[\varkappa_z^{(e)} + \chi_z^{(e)}\xi\right]. \tag{3.131}$$

Równość powyższa musi być prawdziwa dla każdego ξ, co jest spełnione wtedy i tylko wtedy, gdy:

$$\begin{cases} k_{EJ}^{(e)}\left[\varkappa_z^{(e)} - \hat{\varkappa}_z^{(e)}\right] = \hat{k}_{EJ}^{(e)}\varkappa_z^{(e)}, \\ k_{EJ}^{(e)}\left[\chi_z^{(e)} - \hat{\chi}_z^{(e)}\right] = \hat{k}_{EJ}^{(e)}\chi_z^{(e)}. \end{cases} \tag{3.132}$$

Prowadzi to do następujących związków opisujących zmianę współczynnika sztywności zgięciowej:

$$\mu_{EJ}^{(e)} = \frac{\hat{k}_{EJ}^{(e)}}{k_{EJ}^{(e)}} = \frac{\varkappa_z^{(e)} - \hat{\varkappa}_z^{(e)}}{\varkappa_z^{(e)}} = \frac{\chi_z^{(e)} - \hat{\chi}_z^{(e)}}{\chi_z^{(e)}}, \tag{3.133}$$

które można zapisać w postaci

$$\hat{\varkappa}_z^{(e)} = \left(1 - \mu_{EJ}^{(e)}\right)\varkappa_z^{(e)}, \qquad \hat{\chi}_z^{(e)} = \left(1 - \mu_{EJ}^{(e)}\right)\chi_z^{(e)}. \tag{3.134}$$

Zauważmy, że pomiędzy składowymi całkowitego uogólnionego odkształcenia krzywiznowego, a dystorsjami zgięciowymi musi zawsze zachodzić korelacja:

$$\frac{\hat{\varkappa}_z^{(e)}}{\varkappa_z^{(e)}} = \frac{\hat{\chi}_z^{(e)}}{\chi_z^{(e)}}. \tag{3.135}$$

Niestety powyższa zależność nie pozwala nam, na wyeliminowanie jednej ze składowych dystorsyjnych, np:

$$\hat{\chi}_z^{(e)} = \frac{\chi_z^{(e)}}{\varkappa_z^{(e)}}\,\hat{\varkappa}_z^{(e)}, \tag{3.136}$$

gdyż musimy pamiętać, że odkształcenia całkowite występujące po prawej stronie tego równania, zależą od stanów dystorsji (a więc między innymi również od $\hat{\chi}_z^{(e)}$):

$$\varkappa_z^{(e)} = \varkappa_z^{(e)}\left(\ldots, \hat{\varkappa}_z^{(e)}, \hat{\chi}_z^{(e)}, \ldots\right), \qquad \chi_z^{(e)} = \chi_z^{(e)}\left(\ldots, \hat{\varkappa}_z^{(e)}, \hat{\chi}_z^{(e)}, \ldots\right). \tag{3.137}$$

Jest to również przyczyną, dla której znając modyfikację współczynnika sztywności zgięsiowej, $\mu_{EJ}^{(e)}$, nie możemy jednak od razu obliczyć modelujących ją dystorsji $\hat{\varkappa}_z^{(e)}$, $\hat{\chi}_z^{(e)}$, korzystając bezpośrednio ze związków (3.134), gdyż dystorsje te występują również (niejawnie) po prawej stronie tych formuł. Są to związki nieliniowe ze względu na składowe dystorsji. To samo dotyczy również równania (3.129). Sposób obliczania dystorsji modelujących zmianę sztywności konstrukcyjnych – wraz z prostym algorytmem oraz przykładem testowym – są przedstawione w następnym rozdziale dla ogólnego przypadku konstrukcji składającej z dowolnych, różnych elementów skończonych[20)].

[20)] Właściwie wymagane jest, aby dla danego elementu skończonego możliwe było określenie bazy ortogonalnych deformacji własnych, co pozwoli na zdefiniowanie stanów dystorsji jednostkowych. Nie zawsze będzie to oczywiste i bezproblemowe – patrz przypisy 14 i 15, str. 56.

Rozdział 4

Modelowanie dystorsjami parametrów konstrukcyjnych

4.1. Wprowadzenie

W rozdziale podany będzie sposób wykorzystania dystorsji wirtualnych do modelowania zmian parametrów konstrukcyjnych, wpływających na cechy sztywnościowe ustroju. Podejście to można więc wykorzystywać do optymalizacji konstrukcji ze względu na parametry projektowe, jak również do modelowania defektów, które zazwyczaj powodują lokalne obniżenie sztywności konstrukcji. Zaprezentowane równania i oparte na nich algorytmy dotyczyć będą ustrojów składających się z dowolnych elementów skończonych[21)], w których aspekt dystorsyjny zrealizowano według metodologii podanej w poprzednim rozdziale. Prezentowane przykłady dotyczyć będą konstrukcji prętowych.

4.2. Modelowanie zmiany parametrów konstrukcji

Konstrukcja początkowa (przy braku oddziaływań pozastatycznych, takich jak np. obciążenie termiczne) spełnia następujący związek konstytutywny:

$$\overset{\scriptscriptstyle\mathrm{L}}{S}_i = k_i \, \overset{\scriptscriptstyle\mathrm{L}}{\varepsilon}_i. \tag{4.1}$$

21) Patrz komentarz w przypisie 20, str. 69.

gdzie: $\overset{\text{L}}{S}_i$ są składowymi wektorów sił wewnętrznych elementów konstrukcji (składowymi tzw. naprężeń uogólnionych), $\overset{\text{L}}{\varepsilon}_i$ są składowymi wektorów uogólnionych odkształceń, natomiast k_i to parametry sztywnościowe elementów konstrukcyjnych.

Analogiczny związek dla sił wewnętrznych S_i i odkształceń uogólnionych ε_i konstrukcji zmodyfikowanej ma postać:

$$S_i = \hat{k}_i\, \varepsilon_i, \tag{4.2}$$

gdzie $\hat{k}_i$ są sztywnościami zmodyfikowanej konstrukcji.

Poprzez modyfikację konstrukcji rozumiemy zmianę pewnych parametrów p_s niektórych jej elementów. Parametrami tymi może być przykładowo jakiś wymiar przekroju poprzecznego, całkowite pole przekroju, albo moduł Younga materiału jakiegoś elementu itp. Te wybrane parametry grupujemy w **wektor parametrów konstrukcyjnych** $\mathbf{p} = \left[p_s\right]$. Wymagamy, aby składowe tego wektora miały jednoznacznie określony wpływ na uogólnione sztywności elementów konstrukcji, czyli aby istniała zależność:

$$k_i = k_i(\mathbf{p}), \tag{4.3}$$

pociągająca oczywiście za sobą analogiczny związek na sztywności i parametry zmodyfikowane:

$$\hat{k}_i = k_i(\hat{\mathbf{p}}), \quad \text{gdzie} \quad \hat{\mathbf{p}} = \left[\hat{p}_s\right], \tag{4.4}$$

przy czym $\hat{p}_s$ to oczywiście zmodyfikowana wartość parametru p_s.

Wygodnie jest posługiwać się nie tyle samymi wartościami (pierwotną i zmodyfikowaną) parametru konstrukcyjnego, co wielkością opisującą jego modyfikację. Właśnie współczynniki opisujące modyfikacje parametrów konstrukcji stanowić mogą idealne parametry dla funkcji celu określonych dla różnych zagadnień. Korzystać zatem będziemy z **wektora modyfikacji parametrów** konstrukcyjnych

$$\boldsymbol{\lambda} = \left[\lambda_s\right], \quad \text{o składowych:} \quad \lambda_s \equiv \frac{\hat{p}_s}{p_s}, \tag{4.5}$$

wyrażających stosunek zmodyfikowanej wartości parametru do jego wartości pierwotnej.

Jeżeli parametr p_s charakteryzuje tylko jeden konkretny element konstrukcji to jego modyfikacja λ_s będzie wpływała na uogólnione sztywności k_i tylko tego elementu. Zauważmy jednak, że można posługiwać się parametrami wspólnymi dla pewnej grupy elementów, co ma miejsce, gdy w konstrukcji dopuszczane są zmiany dotyczące jednocześnie wszystkich elementów z danej grupy. Takie podejście jest szczególnie istotne w zagadnieniach przeprojektowywania konstrukcji, gdzie wiele cech elementów (jak materiał, wymiary przekroju) musi pozostać ujednolicone dla różnych grup elementów, stanowiąc swego rodzaju ograniczenie (jedno z wielu) dla procesu optymalizacji. Proponowane podejście umożliwia naturalne i proste uwzględnienie tego ograniczenia już na poziomie opisu zagadnienia, tj. konstrukcji funkcji celu, a nie ograniczeń nałożonych na jej parametry.

Idea analizowanej przez nas metody polega na wykorzystaniu dystorsji wirtualnych w celu modelownia wpływu modyfikacji parametrów konstrukcyjnych. Pokazaliśmy, że siły wewnętrzne oraz odkształcenia w konstrukcji modelowanej dystorsjami składają się

z czynnika liniowego, będącego wynikiem obciążenia statycznego, oraz z części rezydualnej, pochodzącej od zadanych stanów dystorsyjnych:

$$S_i = \overset{\text{L}}{S}_i + \overset{\text{R}}{S}_i = k_i \overset{\text{L}}{\varepsilon}_i + k_i \sum_{j\in\mathcal{D}} \big(D_{ij} - \delta_{ij}\big)\, \hat{\varepsilon}_j, \tag{4.6}$$

$$\varepsilon_i = \overset{\text{L}}{\varepsilon}_i + \overset{\text{R}}{\varepsilon}_i = \overset{\text{L}}{\varepsilon}_i + \sum_{j\in\mathcal{D}} D_{ij}\, \hat{\varepsilon}_j. \tag{4.7}$$

Jak wiadomo, przyjmujemy postulat, aby konstrukcja zmodyfikowana i konstrukcja modelowana dystorsjami były tożsame w sensie równości pól odkształceń i sił wewnętrznych. Zatem, podstawiając (4.6) i (4.7) do (4.2), otrzymujemy:

$$k_i \overset{\text{L}}{\varepsilon}_i + k_i \sum_{j\in\mathcal{D}} \big(D_{ij} - \delta_{ij}\big)\, \hat{\varepsilon}_j = \hat{k}_i \Big(\overset{\text{L}}{\varepsilon}_i + \sum_{j\in\mathcal{D}} D_{ij}\, \hat{\varepsilon}_j\Big). \tag{4.8}$$

Dzieląc strony powyższego równania przez k_i oraz wykorzystując istotne w dalszych rozważaniach oznaczenie:

$$\mu_i \equiv \frac{\hat{k}_i}{k_i}, \tag{4.9}$$

otrzymujemy

$$\sum_{j\in\mathcal{D}} \big[\delta_{ij} - (1-\mu_i)\, D_{ij}\big]\hat{\varepsilon}_j = (1-\mu_i)\, \overset{\text{L}}{\varepsilon}_i. \tag{4.10}$$

Jest to układ równań liniowych ze względu na dystorsje $\hat{\varepsilon}_i$:

$$\sum_{j\in\mathcal{D}} A_{ij}\, \hat{\varepsilon}_j = b_i, \tag{4.11}$$

gdzie:

$$A_{ij} = \delta_{ij} - (1-\mu_i)\, D_{ij}, \qquad b_i = (1-\mu_i)\, \overset{\text{L}}{\varepsilon}_i. \tag{4.12}$$

Rozwiązując ten układ otrzymamy dystorsje $\hat{\varepsilon}_i$, które należy nałożyć na elementy konstrukcji początkowej, aby (przy zadanym, ustalonym obciążeniu – tj. takim, dla którego wyznaczono $\overset{\text{L}}{\varepsilon}_i$ oraz $\overset{\text{L}}{S}_i$) otrzymać takie same przemieszczenia, siły wewnętrzne i odkształcenia uogólnione, jak w konstrukcji zmodyfikowanej obciążonej w ten sam sposób. Znając wartości dystorsji modelujących $\hat{\varepsilon}_i$ możemy szybko wyznaczyć uaktualnione wartości sił wewnętrznych i odkształceń (w lokalizacjach dystorsyjnych $i \in \mathcal{D}$), korzystając ze związków (4.6) i (4.7). Zauważmy tutaj, że do wyznaczenia dystorsji oraz obliczenia aktualnych stanów odkształcenia wykorzystujemy tę samą odkształceniową macierz wpływu D_{ij}, przy czym w tym drugim przypadku pełni ona rolę tzw. uogólnionej macierzy wpływu (patrz paragraf 2.3.2). Zwykle jednak interesują nas aktualne (tj. po wirtualnych modyfikacjach) wartości dla określonych wielkości innych niż odkształcenia w lokalizacjach $i \in \mathcal{D}$ – efektywnym podejściem jest wykorzystywanie obliczonej na wstępie w tym celu odpowiedniej ogólnej macierzy wpływu.

Wprowadzone oznaczenie (4.9) definiuje **zmianę sztywności** konstrukcyjnej k_i. Było ono już wcześniej wykorzystywane dla konkretnych przypadków sztywności podłużnej

i zgięciowej pręta. Przyjmijmy teraz, że zależność (4.3) (współczynnika sztywności k_i od przyjętych parametrów konstrukcyjnych $\mathbf{p}$) jest takiego rodzaju, że parametr zmiany tej sztywności da się przedstawić w postaci[22]:

$$\mu_i = \mu_i(\boldsymbol{\lambda}), \tag{4.13}$$

czyli jako funkcja wielkości opisujących modyfikacje parametrów konstrukcyjnych. Definiujemy zatem **wektor zmiany sztywności** konstrukcji, jako w jednoznaczny sposób zależny od składowych wektora modyfikacji parametrów konstrukcyjnych:

$$\boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{\lambda}) = \left[\mu_i(\boldsymbol{\lambda})\right]. \tag{4.14}$$

W przypadku stosowania Metody Dystorsji Wirtualnych do zagadnień wrażliwości, w których obliczamy wpływ na konstrukcję zmiany pewnych parametrów, potrzebujemy, aby zależność (4.13) była różniczkowalna, tzn. aby można było określić gradient

$$\frac{d\boldsymbol{\mu}}{d\boldsymbol{\lambda}}(\boldsymbol{\lambda}) = \left[\frac{\partial \mu_i}{\partial \lambda_s}(\boldsymbol{\lambda})\right]. \tag{4.15}$$

Przeprowadzone powyżej postępowanie jest niejako uogólnionym powtórzeniem rozumowania z rozdziału 2.2. Zauważmy bowiem, że układ (4.10) otrzymamy podstawiając związek (4.7) do równania (2.9), gdzie oczywiście wielkości $\hat{\varepsilon}_i$, ε_i oraz μ_i traktujemy tym razem jako dystorsje, odkształcenia i modyfikacje sztywnościowe dowolnych elementów skończonych.

4.2.1. Podstawowy algorytm MDW

W tablicy Algorytm 4.1 przedstawiono najprostszy, podstawowy algorytm Metody Dystorsji Wirtualnych, którego celem jest wyznaczenie wartości dystorsji wirtualnych modelujących modyfikacje konstrukcji pod ustalonym obciążeniem statycznym oraz określenie wpływu tych modyfikacji na zachowanie się konstrukcji. Jedną z danych pobieranych przez ten algorytm jest wektorowa funkcja zmiany sztywności konstrukcji, $\boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{\lambda})$, na skutek zadanego wektora modyfikacji parametrów konstrukcyjnych, $\boldsymbol{\lambda}$. Sposób konstruowania tej funkcji dla konstrukcji złożonej z elementów prętowych zostanie przedstawiony w następnym podrozdziale. Przedstawione tam przykłady można uogólnić dla przypadku innych elementów skończonych. Zauważmy również, że wymiar wektora funkcji modyfikacji sztywności musi być oczywiście równy liczbie zadanych lokalizacji dystorsjnych. Ponadto składowe wektora modyfikacji, λ_s, muszą spełniać określone ograniczenia, przynajmniej zapewniające nieujemność składowych wektora $\boldsymbol{\mu}$.

Jedną z wielkości obliczanych w inicjującej części algorytmu jest ogólna macierz wpływu, $\breve{D}_{\alpha i}$. Do obliczenia tej macierzy potrzebne są funkcje odpowiedzi, $f_\alpha(\mathbf{q})$, które muszą liniowo zależeć od węzłowych przemieszczeń konstrukcji, $\mathbf{q}$, a więc pośrednio opisują jak dowolne obciążenia statyczne konstrukcji, $\mathbf{Q}$, (a więc również np. obciążenia kompensacyjne) wpływają na interesujące nas wielkości. W praktyce są to więc często po prostu

[22] Jest to zwykle możliwe dla praktycznie przyjmowanych parametrów. Wybór parametrów powinien uwzględniać ten postulat.

Algorytm 4.1. Modelowanie modyfikacji parametrów konstrukcji statycznej.

Dane oraz obliczenia inicjujące

1. Dane są:
   - konstrukcja pod ustalonym obciążeniem statycznym $\mathbf{Q}$,
   - lokalizacje dystorsyjne: $i, j \in \mathcal{D}$,
   - funkcja (wektorowa) modyfikacji sztywności: $\boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{\lambda}) = \left[\, \mu_i(\boldsymbol{\lambda}) \,\right]$,
   - wektorowa funkcja odpowiedzi: $\mathbf{f}(\mathbf{q}) = \left[\, f_\alpha(\mathbf{q}) \,\right]$.
2. Obliczamy:
   - wektory liniowej odpowiedzi konstrukcji (tj. na obc. $\mathbf{Q}$): $\overset{\text{L}}{\varepsilon}_i$, $\overset{\text{L}}{f}_\alpha = f_\alpha(\mathbf{q}$ dla $\mathbf{Q})$.
   - odkształceniowa macierz wpływu: D_{ij},
   - ogólna macierz wpływu: $\breve{D}_{\alpha i} = f_\alpha(\mathbf{q}$ dla $\varepsilon_i = 1)$.

Obliczenia powtarzalne

3. Pobierany jest argument w postaci wektora modyfikacji parametrów konstrukcyjnych: $\boldsymbol{\lambda} = \left[\, \lambda_s \,\right]$.
4. Obliczamy modyfikacje sztywnościowe: $\mu_i = \mu_i(\boldsymbol{\lambda})$.
5. Wyznaczamy macierz: $A_{ij} = \delta_{ij} - (1 - \mu_i)\, D_{ij}$.
6. Obliczamy wektor prawej strony: $b_i = (1 - \mu_i)\, \overset{\text{L}}{\varepsilon}_i$.
7. Rozwiązujemy układ równań: $\sum_{j \in \mathcal{D}} A_{ij}\, \hat{\varepsilon}_j = b_i$.

   Otrzymujemy dystorsje: $\hat{\varepsilon}_i$.
8. Obliczamy uaktualniony wektor funkcji odpowiedzi: $f_\alpha = \overset{\text{L}}{f}_\alpha + \overset{\text{R}}{f}_\alpha = \overset{\text{L}}{f}_\alpha + \sum_i \breve{D}_{\alpha i}\, \hat{\varepsilon}_i$.

funkcje liniowo zależne od uogólnionych przemieszczeń węzłów w układzie globalnym, przy czym przemieszczenia te wyznaczane są dla konkretnych obciążeń w wyniku rozwiązania podstawowego układu równań statyki konstrukcji (potrzebny jest więc numeryczny model konstrukcji). Funkcję odpowiedzi wykorzystuje się również na wstępie do obliczenia liniowej odpowiedzi ustroju, $\overset{\text{L}}{f}_\alpha$, na zadane obciążenie statyczne, $\mathbf{Q}$. Dla tego obciążenia wyznaczana jest również odkształceniowa odpowiedź układu w lokalizacjach dystorsyjnych, $\overset{\text{L}}{\varepsilon}_i$, która niezbędna jest przy wyznaczeniu dystorsji wirtualnych. Dystorsje te modelują więc zmiany parametrów konstrukcyjnych ustroju rozumianego jako konstrukcja wraz z określonym obciążeniem. Zauważmy, że zarówno ogólna macierz wpływu, jak i odpowiedź liniowa wykorzystywane są dopiero w ostatnim punkcie algorytmu, już po obliczeniu dystorsji wirtualnych. Jak już wspomniano, podejście to pozwala na całkowite uniezależnienie się od modelu konstrukcji po przeprowadzeniu obliczeń inicjujących (tj. zmagazynowaniu macierzy wpływu itp.) – możemy wtedy wielokrotnie wykonywać obliczenia dystorsji modelujące dowolne zmiany zadanych parametrów konstrukcyjnych i sprawdzać jak wpływają one na aktualny stan wielkości opisywanych przez zadany na wstępie wektor funkcji odpowiedzi. Uzyskane wyniki można wykorzystywać w różnego

rodzaju procedurach sterujących, jako parametry funkcji celu itp., inicjując kolejne iteracje, w których ponownie obliczamy dystorsje wykorzystywane do modelowania nowych modyfikacji.

Czasem bardziej odpowiednim może być podejście, w którym nie korzystamy z ogólnej macierzy wpływu, $\breve{D}_{\alpha i}$, gdyż z jakiś przyczyn nie możemy lub nie chcemy definiować funkcji odpowiedzi (np. nie można określić na wstępie jaki rodzaj odpowiedzi konstrukcji nas interesuje). W tym przypadku postępujemy następująco:

- obliczamy dystorsje wirtualne, $\hat{\varepsilon}_i$, według punktów 3÷7 (mając w tym celu zmagazynowane D_{ij} oraz $\overset{\mathrm{L}}{\varepsilon}_i$),
- obliczamy całkowite obciążenie kompensacyjne dla wszystkich dystorsji, jako kombinację liniową obciążeń kompensacyjnych dla odpowiednich dystorsji jednostkowych ze współczynnikami kombinacji w postaci wartości wyznaczonych dystorsji:

$$\hat{\mathbf{Q}}^{(\text{całk.})} = \sum_{i \in \mathcal{D}} \hat{\varepsilon}_i \, \hat{\mathbf{Q}}^{(\text{dla } \hat{\varepsilon}_i\, =\, 1)}, \tag{4.16}$$

- wpływ tych dystorsji (czyli wirtualna modyfikacja) realizowany jest poprzez dodanie powyższego całkowitego obciążenia kompensacyjnego (tj. pochodzącego od wszystkich dystorsji) do ustalonego obciążenia statycznego:

$$\mathbf{Q}^{(\text{akt.})} = \mathbf{Q} + \hat{\mathbf{Q}}^{(\text{całk.})}, \tag{4.17}$$

- otrzymane w ten sposób aktualne obciążenie konstrukcji, $\mathbf{Q}^{(\text{akt.})}$, wykorzystujemy obliczając uogólnione przemieszczenia węzłów, które będą identyczne z przemieszczeniami konstrukcji zmodyfikowanej poddanej obciążeniu $\mathbf{Q}$, i które możemy teraz wykorzystać w dowolnym celu.

Zauważmy, że ten sposób postępowania wymaga stałego dysponowania dostępem do numerycznego modelu konstrukcji, który jednak dzięki zastosowaniu MDW nie podlega modyfikacji.

Na koniec zajmijmy się przypadkiem, gdy chcemy dokonywać wirtualnych modyfikacji konstrukcji dla różnych wariantów obciążenia statycznego, $\mathbf{Q}$. Istotnym *novum* jest tutaj tylko to, iż dla każdego z tych wariantów w celu wyznaczenia dystorsji musimy najpierw obliczyć odpowiednią odpowiedź liniową – odkształceniową, $\overset{\mathrm{L}}{\varepsilon}_i$, oraz (ewentualnie) funkcji odpowiedzi, $\overset{\mathrm{L}}{f}_\alpha$. Macierze wpływu (zarówno odkształceniowa, jaki i ogólna) są oczywiście dla wszystkich wariantów identyczne.

4.3. Przykładowe parametry konstrukcyjne, a zmiana sztywności

W podrozdziale tym, dla przypadków elementów prętowych oraz prostej konstrukcji ramowej, zostaną przedstawione przykłady konstruowania wektorów modyfikacji parametrów konstrukcyjnych oraz wyznaczania macierzy ich gradientu. Oczywiście w analogiczny sposób należy postępować mając do czynienia z innymi elementami skończonymi.

4.3.1. Pręt kratowy

W przypadku pręta kratownicy dysponujemy, jak wiadomo, tylko jednym współczynnikiem sztywności – brane pod uwagę parametry muszą wpływać na sztywność podłużną charakteryzującą ten element. Wektor zmiany sztywności dla pojedynczego pręta ma zatem tylko jedną składową:

$$\boldsymbol{\mu} = \left[\mu_1\right], \qquad \mu_1 = \frac{\hat{k}_{EA}}{k_{EA}}. \tag{4.18}$$

Poniżej przedstawiamy przykładowe parametry konstrukcyjne elementu kratowego oraz ich relacje z wektorem zmiany sztywności i jego gradientem.

- Rozpatrzymy wpływ modułu Younga materiału pręta lub (co jest tożsame) pola jego przekroju poprzecznego na sztywność podłużną pręta. Niech zatem wektor modyfikacji parametrów konstrukcyjnych ma jedną składową $\boldsymbol{\lambda} = \left[\lambda_1\right]$, przy czym $\lambda_1 = \hat{E}/E$ lub $\lambda_1 = \hat{A}/A$. Od razu widać, że

$$\boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{\lambda}) = \left[\lambda_1\right] \qquad \text{oraz} \qquad \frac{d\boldsymbol{\mu}}{d\boldsymbol{\lambda}}(\boldsymbol{\lambda}) = \left[1\right] = \text{const.} \tag{4.19}$$

  Ten oczywisty wynik jest tożsamy z sytuacją, w której za parametr przyjętoby bezpośrednio sztywność podłużną $\lambda_1 = k_{EA}$.

- Mniej trywialny wynik otrzymamy przyjmując moduł Younga i pole przekroju jako dwa niezależne parametry[23)], czyli: $\boldsymbol{\lambda} = \left[\lambda_1 \quad \lambda_2\right]^{\mathrm{T}}$, gdzie $\lambda_1 = \hat{E}/E$, $\lambda_2 = \hat{A}/A$. Wtedy

$$\boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{\lambda}) = \left[\lambda_1\lambda_2\right] \qquad \text{oraz} \qquad \frac{d\boldsymbol{\mu}}{d\boldsymbol{\lambda}}(\boldsymbol{\lambda}) = \begin{bmatrix}\lambda_2\\ \lambda_1\end{bmatrix} = \text{const.} \tag{4.20}$$

- Rozpatrzmy pręt o kołowym przekroju poprzecznym. Promień r tego przekroju stanowi dla nas istotny parametr konstrukcyjny. Niech więc: $\boldsymbol{\lambda} = \left[\lambda_1\right]$, $\lambda_1 = \hat{r}/r$. Wtedy

$$\mu_1 = \frac{\hat{k}_{EA}}{k_{EA}} = \frac{E\pi\hat{r}^2}{E\pi r^2} = \left(\frac{\hat{r}}{r}\right)^2, \tag{4.21}$$

  czyli

$$\boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{\lambda}) = \left[\lambda_1^2\right] \qquad \text{oraz} \qquad \frac{d\boldsymbol{\mu}}{d\boldsymbol{\lambda}}(\boldsymbol{\lambda}) = \left[2\lambda_1\right]. \tag{4.22}$$

- Dla pręta o przekroju kołowym za parametry przyjmujemy moduł Younga materiału i promień przekroju – zatem: $\boldsymbol{\lambda} = \left[\lambda_1 \quad \lambda_2\right]^{\mathrm{T}}$, gdzie $\lambda_1 = \hat{E}/E$ oraz $\lambda_2 = \hat{r}/r$. Wtedy

$$\boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{\lambda}) = \left[\lambda_1\lambda_2^2\right] \qquad \text{oraz} \qquad \frac{d\boldsymbol{\mu}}{d\boldsymbol{\lambda}}(\boldsymbol{\lambda}) = \begin{bmatrix}\lambda_2^2\\ 2\lambda_1\lambda_2\end{bmatrix}. \tag{4.23}$$

[23)] Mogłoby się wydawać, że w przypadku pręta kratownicy lepiej jest zawsze przyjąć jeden, bezpośredni parametr: sztywność podłużną. Jednakże stosowanie podejścia, w którym rozróżniamy dwa parametry (w taki sam, liniowy sposób wpływające na współczynnik sztywności podłużnej) ma bardzo często sens – np. w przypadku, gdy pręt stanowi fragment konstrukcji, w której zarazem modelujemy materiał, jak i pola przekrojów, przy czym – przykładowo – materiał jest wspólny dla pewnej grupy elementów, natomiast pola przekrojów rozpatrujemy indywidualnie.

4.3.2. Pręt ramy płaskiej

Przypomnijmy, że w płaskim pręcie Bernoulliego wyróżniamy dwa współczynniki sztywności: podłużny k_{EA} i zgięciowy k_{EJ}. W poprzednim rozdziale pokazano, że w elemencie skończonym takiego pręta mamy po trzy składowe wektora odkształcenia (3.57) i trzy składowe wektora sił wewnętrznych (3.87). Spełniają one związek konstytutywny (4.1), gdzie podstawiamy: $S_1 = N^{(e)}_{x\,\mathrm{const}}$, $\varepsilon_1 = \varepsilon^{(e)}_x$, $S_2 = M^{(e)}_{z\,\mathrm{const}}$, $\varepsilon_2 = \varkappa^{(e)}_z$, $S_3 = M^{(e)}_{z\,\mathrm{asym}}$ i $\varepsilon_3 = \chi^{(e)}_z$, oraz dla składowych stanu podłużnego $k_1 = k_{EA}$, natomiast dla obu par składowych stanu zgięciowego wykorzystujemy ten sam współczynnik sztywności zgięciowej: $k_2 = k_3 = k_{EJ}$. Zatem wektor zmiany sztywności dla pojedynczego elementu będzie miał trzy składowe i postać:

$$\boldsymbol{\mu} = \begin{bmatrix}\mu_1\\ \mu_2\\ \mu_3\end{bmatrix}, \quad \text{gdzie} \quad \mu_1 = \frac{\hat{k}_{EA}}{k_{EA}}, \quad \mu_2 = \mu_3 = \frac{\hat{k}_{EJ}}{k_{EJ}}. \tag{4.24}$$

Przyjmijmy, że przekrój poprzeczny elementu jest prostokątem o wymiarach: $b \times h$. Przypomnijmy, że sztywność podłużna takiego pręta wynosi $k_{EA} = E\,b\,h$, natomiast sztywność zgięciowa: $k_{EJ} = E\,b\,h^3/12$. Poniżej prezentujemy przykładowe wektory zmiany sztywności i macierze ich gradientu przy wyborze odpowiednich parametrów konstrukcyjnych.

- Niech $\boldsymbol{\lambda} = \begin{bmatrix}\lambda_1\end{bmatrix}$, gdzie $\lambda_1 = \dfrac{\hat{E}}{E}$ lub $\lambda_1 = \dfrac{\hat{b}}{b}$. Wtedy

$$\boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{\lambda}) = \begin{bmatrix}\lambda_1\\ \lambda_1\\ \lambda_1\end{bmatrix} \qquad \text{oraz} \qquad \frac{d\boldsymbol{\mu}}{d\boldsymbol{\lambda}}(\boldsymbol{\lambda}) = \begin{bmatrix}1\\ 1\\ 1\end{bmatrix} = \text{const}. \tag{4.25}$$

- Niech $\boldsymbol{\lambda} = \begin{bmatrix}\lambda_1\end{bmatrix}$, gdzie $\lambda_1 = \dfrac{\hat{h}}{h}$. Wtedy

$$\boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{\lambda}) = \begin{bmatrix}\lambda_1\\ \lambda_1^3\\ \lambda_1^3\end{bmatrix} \qquad \text{oraz} \qquad \frac{d\boldsymbol{\mu}}{d\boldsymbol{\lambda}}(\boldsymbol{\lambda}) = \begin{bmatrix}1\\ 3\lambda_1^2\\ 3\lambda_1^2\end{bmatrix}. \tag{4.26}$$

- Niech $\boldsymbol{\lambda} = \begin{bmatrix}\lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$, gdzie $\lambda_1 = \dfrac{\hat{E}}{E}$, $\lambda_2 = \dfrac{\hat{b}}{b}$, $\lambda_3 = \dfrac{\hat{h}}{h}$. Wtedy

$$\boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{\lambda}) = \begin{bmatrix}\lambda_1\lambda_2\lambda_3\\ \lambda_1\lambda_2\lambda_3^3\\ \lambda_1\lambda_2\lambda_3^3\end{bmatrix} \qquad \text{oraz} \qquad \frac{d\boldsymbol{\mu}}{d\boldsymbol{\lambda}}(\boldsymbol{\lambda}) = \begin{bmatrix}\lambda_2\lambda_3 & \lambda_1\lambda_3 & \lambda_1\lambda_2\\ \lambda_2\lambda_3^3 & \lambda_1\lambda_3^3 & 3\lambda_1\lambda_2\lambda_3^2\\ \lambda_2\lambda_3^3 & \lambda_1\lambda_3^3 & 3\lambda_1\lambda_2\lambda_3^2\end{bmatrix}. \tag{4.27}$$

- Niech $\boldsymbol{\lambda} = \begin{bmatrix}\lambda_1\end{bmatrix}$, gdzie $\lambda_1 = \dfrac{\hat{b}}{b} = \dfrac{\hat{h}}{h}$. Przyjęta składowa wektora modyfikacji oznacza, że zmiana parametru konstrukcyjnego zachowuje proporcje pomiędzy

długościami boków przekroju (tzn. jeśli np. przekrój był kwadratowy, to takim pozostanie po modyfikacji). Wtedy

$$\boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{\lambda}) = \begin{bmatrix} \lambda_1^2 \\ \lambda_1^4 \\ \lambda_1^4 \end{bmatrix} \quad \text{oraz} \quad \frac{d\boldsymbol{\mu}}{d\boldsymbol{\lambda}}(\boldsymbol{\lambda}) = \begin{bmatrix} 2\lambda_1 \\ 4\lambda_1^3 \\ 4\lambda_1^3 \end{bmatrix}. \tag{4.28}$$

4.3.3. Parametry konstrukcyjne i sztywnościowe ustroju na przykładzie ramy płaskiej

Rozpatrzmy ramę płaską, o przynajmniej dwóch elementach belkowych ($e = 1, 2$) i jednym kratowym ($e = 3$). Przekroje poprzeczne tych elementów są prostokątne o wymiarach: $b^{(e)} \times h^{(e)}$ $(e = 1, 2, 3)$. Pozostałe elementy nie są brane pod uwagę, gdyż zakładamy, że parametry konstrukcyjne wpływające na ich sztywność nie ulegają zmianie (mogą to więc nawet być elementy skończone innego typu niż pręty ramy płaskiej).

- Niech $\boldsymbol{\lambda} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$, gdzie $\lambda_s = \dfrac{\hat{b}^{(s)}}{b^{(s)}}$ $(s = 1, 2, 3)$. Wtedy

$$\boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{\lambda}) = \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_1 \\ \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_2 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{bmatrix}, \qquad \frac{d\boldsymbol{\mu}}{d\boldsymbol{\lambda}}(\boldsymbol{\lambda}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \text{const.} \tag{4.29}$$

- Niech $\boldsymbol{\lambda} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$, gdzie $\lambda_s = \dfrac{\hat{h}^{(s)}}{h^{(s)}}$ $(s = 1, 2, 3)$. Wtedy

$$\boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{\lambda}) = \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_1^3 \\ \lambda_1^3 \\ \lambda_2 \\ \lambda_2^3 \\ \lambda_2^3 \\ \lambda_3 \end{bmatrix}, \qquad \frac{d\boldsymbol{\mu}}{d\boldsymbol{\lambda}}(\boldsymbol{\lambda}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3\lambda_1^2 & 0 & 0 \\ 3\lambda_1^2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3\lambda_2^2 & 0 \\ 0 & 3\lambda_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \tag{4.30}$$

- Niech $\boldsymbol{\lambda} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$, gdzie $\lambda_1 = \dfrac{\hat{b}^{(1)}}{b^{(1)}} = \dfrac{\hat{b}^{(2)}}{b^{(2)}}$, $\lambda_2 = \dfrac{\hat{h}^{(1)}}{h^{(1)}} = \dfrac{\hat{h}^{(2)}}{h^{(2)}}$, $\lambda_3 = \dfrac{\hat{A}^{(3)}}{A^{(3)}}$. Przyjmujemy tutaj takie składowe wektora modyfikacji, które przy dodatkowym założeniu, że $b^{(1)} = b^{(2)}$ i $h^{(1)} = h^{(2)}$, oznaczają, iż przekroje elementów ramowych ($e = 1, 2$) są i pozostaną identyczne, natomiast ewentualne zmiany przekroju

pręta kratowego ($e = 3$) są modelowane niezależnie. Otrzymujemy

$$\boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{\lambda}) = \begin{bmatrix} \lambda_1\lambda_2 \\ \lambda_1\lambda_2^3 \\ \lambda_1\lambda_2^3 \\ \lambda_1\lambda_2 \\ \lambda_1\lambda_2^3 \\ \lambda_1\lambda_2^3 \\ \lambda_3 \end{bmatrix}, \qquad \frac{d\boldsymbol{\mu}}{d\boldsymbol{\lambda}}(\boldsymbol{\lambda}) = \begin{bmatrix} \lambda_2 & \lambda_1 & 0 \\ \lambda_2^3 & 3\lambda_1\lambda_2^2 & 0 \\ \lambda_2^3 & 3\lambda_1\lambda_2^2 & 0 \\ \lambda_2 & \lambda_1 & 0 \\ \lambda_2^3 & 3\lambda_1\lambda_2^2 & 0 \\ \lambda_2^3 & 3\lambda_1\lambda_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \tag{4.31}$$

- Niech $\boldsymbol{\lambda} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$, gdzie $\lambda_1 = \dfrac{\hat{b}^{(2)}}{b^{(2)}}$, $\lambda_2 = \dfrac{\hat{h}^{(2)}}{h^{(2)}}$. Oznacza to, iż modelujemy tylko element $e = 2$. Wtedy

$$\boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{\lambda}) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ \lambda_1\lambda_2 \\ \lambda_1\lambda_2^3 \\ \lambda_1\lambda_2^3 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad \frac{d\boldsymbol{\mu}}{d\boldsymbol{\lambda}}(\boldsymbol{\lambda}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \lambda_2 & \lambda_1 \\ \lambda_2^3 & 3\lambda_1\lambda_2^2 \\ \lambda_2^3 & 3\lambda_1\lambda_2^2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}. \tag{4.32}$$

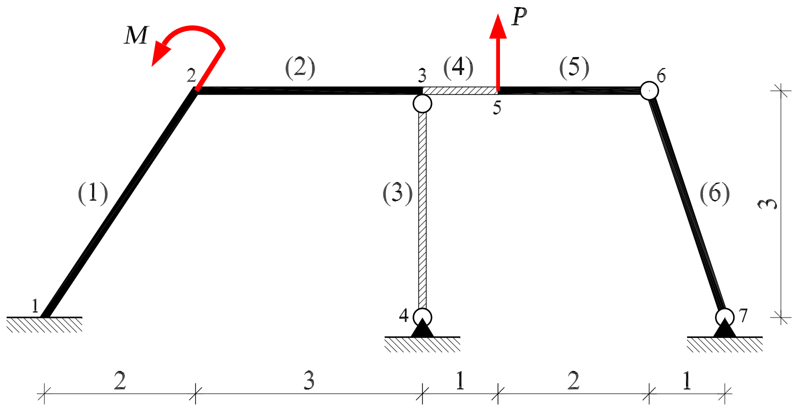
Oczywiście w przypadku kiedy wiemy, że elementy $e = 1, 3$ nie będą modyfikowane należy ograniczyć zbiór lokalizacji dystorsyjnych tylko do dystorsji na elemencie $e = 2$, co ograniczy wektor modyfikacji i macierz gradientu (4.32) do wierszy 4, 5 i 6.

4.4. Przykład modelowania dystorsjami

Przedstawiony poniżej przykład ma charakter czysto dydaktyczny – prezentuje kolejno obliczenia dokonywane w ramach algorytmu 4.1. Może zatem stanowić również prosty test numeryczny. Nie eksponuje jednak istoty MDW, która polega na wykorzystaniu możliwości wielokrotnego, wirtualnego modyfikowania ustroju dla problemów modelowania defektów, uplastycznienia, do zagadnień przeprojektowywania oraz aktywnej lub pół-aktywnej kontroli (*active and semi-active control*) i sterowania (tzw. konstrukcje "inteligentne" – *smart structures*).

Przykład 4.1 : Rozpatrywać będziemy ramę płaską przedstawioną na rys. 4.1, poddaną ustalonemu obciążeniu statycznemu, siłą skupioną $P = 1000\,\mathrm{N}$ oraz momentem zginającym $M = 500\,\mathrm{N\,m}$, w sposób pokazany na rysunku.

Przyjmijmy dla wszystkich elementów ramy identyczny materiał (stal) o module Younga: $E = 2{,}1 \cdot 10^{11}\,\mathrm{N/m^2}$. Natomiast charakterystyki geometryczne dla poszczególnych elementów



Rys. 4.1. Rama płaska. Modyfikacja dotyczy elementów 3 i 4.

są następujące:

$$A^{(1)} = A^{(2)} = A^{(5)} = 1{,}2 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{m}^2, \qquad A^{(6)} = 1{,}2 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{m}^2,$$
$$J_z^{(1)} = J_z^{(2)} = J_z^{(5)} = 1{,}6 \cdot 10^{-7}\,\mathrm{m}^4,$$

oraz dla elementów nr 3 i 4:

$$A^{(3)} = b^2, \qquad A^{(4)} = b\,h, \qquad J_z^{(4)} = \frac{b\,h^3}{12},$$

skąd można wnioskować, że h jest wysokością prostokątnego przekroju poprzecznego elementu $e = 4$, natomiast b jest jego szerokością, a zarazem długością boku kwadratowego przekroju elementu $e = 3$, przy czym uznajemy, że podczas ewentualnych modyfikacji ta zależność musi zostać utrzymana. Przyjmujemy, że pierwotne wartości tych parametrów wynoszą:

$$b = 3 \cdot 10^{-2}\,\mathrm{m}, \qquad h = 4 \cdot 10^{-2}\,\mathrm{m}.$$

Interesować nas będzie wpływ modyfikacji powyższych parametrów na konstrukcję pod zadanym obciążeniem statycznym. Wektor modyfikacji parametrów konstrukcyjnych ma zatem postać:

$$\boldsymbol{\lambda} = \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{bmatrix}, \quad \text{gdzie:} \quad \lambda_1 = \frac{\hat{b}}{b}, \quad \lambda_2 = \frac{\hat{h}}{h}. \tag{4.33}$$

Modyfikacje dotyczyć będą tylko elementów nr 3 i 4, gdyż zmiana wartości parametru h wpływa na współczynniki sztywności $k_{EA}^{(4)}$ oraz $k_{EJ}^{(4)}$, zaś zmiana parametru b wpływa na te sztywności i dodatkowo na współczynnik $k_{EA}^{(3)}$. Wektor modyfikacji sztywności definiujemy zatem następująco:

$$\boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{\lambda}) = \begin{bmatrix} \frac{\hat{k}_{EA}^{(3)}}{k_{EA}^{(3)}} & \frac{\hat{k}_{EA}^{(4)}}{k_{EA}^{(4)}} & \frac{\hat{k}_{EJ}^{(4)}}{k_{EJ}^{(4)}} & \frac{\hat{k}_{EJ}^{(4)}}{k_{EJ}^{(4)}} \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} \lambda_1^2 \\ \lambda_1\lambda_2 \\ \lambda_1\lambda_2^3 \\ \lambda_1\lambda_2^3 \end{bmatrix}, \tag{4.34}$$

natomiast lokalizacje dystorsyjne wskazują (odpowiednio) parametry uogólnionych odkształceń dla tych elementów:

$$\mathcal{D} = \{1 \to \varepsilon_x^{(3)},\ 2 \to \varepsilon_x^{(4)},\ 3 \to \varkappa_z^{(4)},\ 4 \to \chi_z^{(4)}\}, \tag{4.35}$$

a więc $i, j = 1, \ldots, 4$. Wektor dystorsji definiujemy konsekwentnie w następujący sposób:

$$\hat{\boldsymbol{\varepsilon}} = \begin{bmatrix} \hat{\varepsilon}_x^{(3)} & \hat{\varepsilon}_x^{(4)} & \hat{\varkappa}_z^{(4)} & \hat{\chi}_z^{(4)} \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}. \tag{4.36}$$

Potrzebna dla obliczania dystorsji odkształceniowa macierz wpływu ma wymiar 4×4 i postać:

$$\mathbf{D} = [D_{ij}] = \begin{bmatrix} \texttt{9,999141E-01} & \texttt{4,553945E-06} & \texttt{-3,415458E-05} & \texttt{2,276972E-06} \\ \texttt{1,366183E-05} & \texttt{9,999992E-01} & \texttt{5,834806E-06} & \texttt{-3,889870E-07} \\ \texttt{-7,684781E-01} & \texttt{4,376104E-02} & \texttt{6,717922E-01} & \texttt{2,188052E-02} \\ \texttt{1,536956E-01} & \texttt{-8,752209E-03} & \texttt{6,564156E-02} & \texttt{9,956239E-01} \end{bmatrix}. \tag{4.37}$$

Natomiast zależna od ustalonego obciążenia statycznego, a więc liniowa część odkształceń w lokalizacjach dystorsyjnych wynosi:

$$\overset{\mathrm{L}}{\boldsymbol{\varepsilon}} = [\overset{\mathrm{L}}{\varepsilon}_i] = \begin{bmatrix} \overset{\mathrm{L}}{\varepsilon}{}_x^{(3)} & \overset{\mathrm{L}}{\varepsilon}{}_x^{(4)} & \overset{\mathrm{L}}{\varkappa}{}_z^{(4)} & \overset{\mathrm{L}}{\chi}{}_z^{(4)} \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} \texttt{1,529805E-06} \\ \texttt{1,720844E-07} \\ \texttt{-2,239269E-03} \\ \texttt{-5,504527E-03} \end{bmatrix}. \tag{4.38}$$

Przyjmijmy, że z jakiś względów interesować nas będą tylko:

- przemieszczenie pionowe węzła nr 5,
- różnica pomiędzy kątami obrotu węzłów nr 3 i 2 (nb. wielkość ta jest proporcjonalna do krzywizny belki $e = 2$).

Zauważmy, że obie te wielkości są liniowo zależne od uogólnionych przemieszczeń konstrukcji, a więc liniowo zależne od obciążenia itd. – spełniają więc założenia założone na składowe wektora funkcji odpowiedzi. Zatem $\alpha = 1, 2$, zaś wektor funkcji odpowiedzi ma postać:

$$\mathbf{f} = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{bmatrix}, \quad \text{gdzie:} \quad f_1 = v_5, \qquad f_2 = \varphi_3 - \varphi_2. \tag{4.39}$$

Funkcje te wykorzystujemy do obliczenia ogólnej macierzy wpływu (o wymiarze 2×4):

$$\breve{\mathbf{D}} = [\breve{D}_{\alpha i}] = \begin{bmatrix} \texttt{2,313065E+00} & \texttt{8,673052E-02} & \texttt{-1,504789E-01} & \texttt{-1,233014E-01} \\ \texttt{-1,251920E+00} & \texttt{8,261400E-02} & \texttt{-6,196050E-01} & \texttt{4,130700E-02} \end{bmatrix}, \tag{4.40}$$

oraz wyznaczamy liniową odpowiedź konstrukcji na zadane obciążenie statyczne:

$$\overset{\mathrm{L}}{\mathbf{f}} = [\overset{\mathrm{L}}{f}_\alpha] = \begin{bmatrix} \texttt{5,602002E-03} \\ \texttt{7,705601E-03} \end{bmatrix}. \tag{4.41}$$

Mając zmagazynowane odkształceniową macierz wpływu (4.37) oraz linowe odkształcenia (4.38), możemy obliczać wektor dystorsji wirtualnych modelujących zadane modyfikacje

parametrów konstrukcyjnych (4.33). Przykładowo dla $\boldsymbol{\lambda} = \begin{bmatrix} 0{,}8 & 0{,}6 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$ obliczamy wektor modyfikacji sztywności:

$$\boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{\lambda}) = \begin{bmatrix} \mu_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}64 & 0{,}48 & 0{,}1728 & 0{,}1728 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}, \tag{4.42}$$

który wykorzystujemy do wyznaczenia macierzy A_{ij} i wektora prawej strony b_i, zgodnie z wzorami (4.12). Następnie rozwiązujemy układ równań (4.11), otrzymując poszukiwany wektor dystorsji:

$$\hat{\boldsymbol{\varepsilon}} = \begin{bmatrix} \hat{\varepsilon}_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9{,}269262\mathrm{E}{-}07 \\ 1{,}645735\mathrm{E}{-}07 \\ -5{,}288167\mathrm{E}{-}03 \\ -2{,}743663\mathrm{E}{-}02 \end{bmatrix}. \tag{4.43}$$

Wykorzystując z kolei ogólną macierze wpływu (4.40) oraz liniową odpowiedź konstrukcji (4.41) wyznaczamy uaktualniony wektor funkcji odpowiedzi:

$$\mathbf{f} = \begin{bmatrix} f_\alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9{,}782894\mathrm{E}{-}03 \\ 9{,}847704\mathrm{E}{-}03 \end{bmatrix}. \tag{4.44}$$

Dla $\boldsymbol{\lambda} = \begin{bmatrix} 1{,}0 & 0{,}6 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$ otrzymujemy inne wartości dystorsji oraz inne wyniki dla wektora funkcji odpowiedzi:

$$\hat{\boldsymbol{\varepsilon}} = \begin{bmatrix} \hat{\varepsilon}_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}000000\mathrm{E}{+}00 \\ 1{,}027461\mathrm{E}{-}07 \\ -4{,}459823\mathrm{E}{-}03 \\ -2{,}071297\mathrm{E}{-}02 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{f} = \begin{bmatrix} f_\alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8{,}827059\mathrm{E}{-}03 \\ 9{,}613347\mathrm{E}{-}03 \end{bmatrix}. \tag{4.45}$$

Dystorsja $\hat{\varepsilon}_1 = \hat{\varepsilon}_x^{(3)}$ jest zerowa, gdyż dla $\lambda_1 = 1{,}0$ (tzn. przy braku modyfikacji parametru b) sztywność elementu $e = 3$ nie ulega zmianie.

Sprawdzono, że uzyskane rezultaty, będące wynikiem wirtualnych modyfikacji za pomocą dystorsji są takie same (z dokładnością do błędów numerycznych mniejszych niż 10^{-13}) jak wyniki otrzymane dla faktycznych modyfikacji (tzn. zmieniających macierz sztywności konstrukcji).

Rozdział 5

Zastosowanie MDW do analizy wrażliwości konstrukcji statycznej

5.1. Wprowadzenie

Analiza wrażliwości polega na badaniu w jaki sposób zmieniają się własności ustroju w odpowiedzi na niewielką modyfikację (perturbację) zmiennej projektowej, rozumianej jako zmiana pewnego parametru konstrukcyjnego. W sensie matematycznym analiza ta polega na znalezieniu pochodnych pewnej funkcji ze względu na wybrane zmienne. Funkcja ta stanowi również (w najbardziej ogólnie rozumianym sensie) określoną w pewien sposób odpowiedź ustroju. W przypadku, gdy jest liniowo zależna od przemieszczeń konstrukcji będzie ona spełniała kryteria funkcji odpowiedzi. Ogólnie jednak można mówić o pewnej dosyć dowolnej funkcji (tzn. spełniającej tylko pewne "słabsze" warunki matematyczne), którą nazywać będziemy **funkcją celu**. Zakładać jednak będziemy, że funkcja ta w "jawnie różniczkowalny sposób" zależy właśnie od określonych funkcji odpowiedzi, czyli:

$$f_{\mathrm{cel}}(\boldsymbol{\lambda}) = \tilde{f}_{\mathrm{cel}}\big(\mathbf{f}(\boldsymbol{\lambda})\big), \qquad \mathbf{f}(\boldsymbol{\lambda}) = \big[f_\alpha(\boldsymbol{\lambda})\big], \qquad \boldsymbol{\lambda} \in \mathcal{L}, \tag{5.1}$$

gdzie $\boldsymbol{\lambda} = \big[\lambda_s\big]$ jest oczywiście wektorem modyfikacji parametrów konstrukcyjnych, którego składowe stanowią zarazem, jak widać, parametry funkcji celu. Zwykle na parametry funkcji celu nałożone są pewne ograniczenia, wynikające z istoty problemu, dla którego funkcja celu stanowi matematyczny opis. Uwzględnienie tych ograniczeń pozwala zdefiniować zbiór dopuszczalnych wektorów modyfikacji $\mathcal{L}$. Oprócz tego oczywistym jest, iż

dopuszczalne wartości parametrów λ_s powinny przynajmniej zawsze gwarantować nieujemność współczynników sztywności, tzn.:

$$\mu_i(\boldsymbol{\lambda}) \geqslant 0 \quad \text{dla} \quad \boldsymbol{\lambda} \in \mathcal{L}. \tag{5.2}$$

Wrażliwość na niewielką perturbację parametrów λ_s opisana jest zatem przez **gradient funkcji celu**:

$$\frac{\partial f_{\text{cel}}(\boldsymbol{\lambda})}{\partial \lambda_s} = \frac{\partial \tilde{f}_{\text{cel}}(\mathbf{f})}{\partial f_\alpha} \frac{\partial f_\alpha(\boldsymbol{\lambda})}{\partial \lambda_s}. \tag{5.3}$$

W rozdziale 7 rozumowanie analogiczne do przedstawionego tutaj zostanie powtórzone i nieco szerzej omówione w kontekście analizy wrażliwości konstrukcji poddanej obciążeniu dynamicznemu.

5.2. Gradient funkcji odpowiedzi

Wstępne omówienie zagadnienia wrażliwości, a zwłaszcza równanie (5.3) pokazują, że analiza wrażliwości, czy też obliczanie pochodnych funkcji celu sprowadzać się będzie w zasadzie do wyznaczenia **gradientu funkcji odpowiedzi**:

$$\frac{d\mathbf{f}}{d\boldsymbol{\lambda}}(\boldsymbol{\lambda}) = \left[\frac{\partial f_\alpha(\boldsymbol{\lambda})}{\partial \lambda_s}\right]. \tag{5.4}$$

Przypomnijmy, że funkcja odpowiedzi składa się z czynnika czynnika liniowego, będącego wynikiem obciążenia statycznego oraz z czynnika rezydualnego związanego z modelowalnymi przez dystorsje wirtualne modyfikacjami parametrów konstrukcyjnych:

$$f_\alpha(\boldsymbol{\lambda}) = \overset{\text{L}}{f}_\alpha + \overset{\text{R}}{f}_\alpha(\boldsymbol{\lambda}) = \overset{\text{L}}{f}_\alpha + \sum_{i \in \mathcal{D}} \breve{D}_{\alpha i}\, \hat{\varepsilon}_i(\boldsymbol{\lambda}), \tag{5.5}$$

przy czym – jak to ukazano w powyższym wyrażeniu – część liniowa jest zależna tylko od obciązenia i (niejako z definicji) nie może zależeć od modyfikacji parametrów projektowych λ_s, gdyż parametry te muszą być powiązane z wielkościami μ_i opisującymi zmianę sztywności konstrukcji. Zatem widać, iż składowe gradientu funkcji odpowiedzi zależą tylko od części rezydualnej, która z kolei zależna jest od dystorsji $\hat{\varepsilon}_i(\boldsymbol{\lambda})$, modelujących modyfikacje sztywnościowe konstrukcji wynikłe ze zmian wartości parametrów λ_s, co po zróżniczkowaniu prowadzi do związku:

$$\frac{\partial f_\alpha(\boldsymbol{\lambda})}{\partial \lambda_s} = \frac{\partial \overset{\text{R}}{f}_\alpha(\boldsymbol{\lambda})}{\partial \lambda_s} = \sum_{i \in \mathcal{D}} \breve{D}_{\alpha i} \frac{\partial \hat{\varepsilon}_i(\boldsymbol{\lambda})}{\partial \lambda_s}. \tag{5.6}$$

gdzie pojawiają się wielkości $\frac{\partial \hat{\varepsilon}_i}{\partial \lambda_s}$, które definiujemy jako **składowe gradientu dystorsji**:

$$\frac{d\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}}{d\boldsymbol{\lambda}}(\boldsymbol{\lambda}) = \left[\frac{\partial \hat{\varepsilon}_i(\boldsymbol{\lambda})}{\partial \lambda_s}\right]. \tag{5.7}$$

Wyznaczenie tych składowych stanowić będzie istotę proponowanej metody obliczania gradientu funkcji odpowiedzi.

5.3. Gradient dystorsji

Gradient dystorsji wyznaczymy różniczkując układ równań (4.10) względem składowych wektora $\boldsymbol{\lambda} = \big[\lambda_s\big]$, pamiętając, że nie tylko $\hat{\varepsilon}_i = \hat{\varepsilon}_i(\boldsymbol{\lambda})$, ale również $\mu_i = \mu_i(\boldsymbol{\lambda})$. Po zróżniczkowaniu oraz zastosowaniu związku

$$\overset{\scriptscriptstyle L}{\varepsilon}_i + \sum_{j\in\mathcal{D}} D_{ij}\,\hat{\varepsilon}_j(\boldsymbol{\lambda}) = \overset{\scriptscriptstyle L}{\varepsilon}_i + \overset{\scriptscriptstyle R}{\varepsilon}_i(\boldsymbol{\lambda}) = \varepsilon_i(\boldsymbol{\lambda}), \tag{5.8}$$

opisującego całkowite odkształcenia w lokalizacjach dystorsyjnych, otrzymujemy następujący zbiór S układów równań liniowych ($S = \dim(\boldsymbol{\lambda})$) na składowe gradientu dystorsji:

$$\sum_{j\in\mathcal{D}} A_{ij}\frac{\partial\hat{\varepsilon}_j(\boldsymbol{\lambda})}{\partial\lambda_s} = -\frac{\partial\mu_i(\boldsymbol{\lambda})}{\partial\lambda_s}\varepsilon_i(\boldsymbol{\lambda}), \tag{5.9}$$

gdzie macierz główna jest taka sama dla wszystkich układów i ma postać identyczną jak dla układu (4.10), tzn.:

$$A_{ij} = \delta_{ij} - \big(1 - \mu_i(\boldsymbol{\lambda})\big)\,D_{ij}. \tag{5.10}$$

Widać zatem, że w celu wyznaczenia wszystkich składowych gradientu dystorsji wystarczy tylko raz dokonać rozkładu LU macierzy A_{ij}, a następnie dla każdego $s = 1,\ldots,S$ obliczyć wektor prawej strony

$$B_{is} = -\frac{\partial\mu_i(\boldsymbol{\lambda})}{\partial\lambda_s}\varepsilon_i(\boldsymbol{\lambda}) \tag{5.11}$$

odpowiedniego układu równań (5.9), który można teraz szybko rozwiązać. Zauważmy tutaj, że do obliczenia wektorów (5.11) musimy znać odkształcenia (5.8), które w zależą również od dystorsji wirtualnych. Musimy zatem uprzednio wyznaczyć te dystorsje rozwiązując układ (4.10), opisany – jak już wspomniano – przez tę samą macierz A_{ij}.

5.4. Algorytm dystorsyjnej analizy wrażliwości ustroju statycznego

W tablicy Algorytm 5.1 zaprezentowano sposób wykorzystania dystorsji wirtualnych dla analizy wrażliwości ustroju statycznego. Zwróćmy uwagę, iż w pewnej części algorytm ten jest powtórzeniem algorytmu 4.1, gdyż dla wyznaczenia stanowiącego główny cel obliczeń gradientu dystorsji potrzebujemy również obliczyć odpowiednie dystorsje wirtualne. Stąd komentarze dotyczące algorytmu 4.1 są aktualne także i tutaj.

Na zakończenie rozpatrzmy jeszcze pewien szczególny przypadek, gdy $\boldsymbol{\lambda} = \mathbf{1}$ (czyli, gdy wszystkie składowe wektora modyfikacji są jednostkowe: $\lambda_s = 1$). Wtedy algorytm 5.1 bardzo się upraszcza. Zauważmy bowiem, że $\mu_i(\mathbf{1}) = 1$, a więc macierz główna jest jednostkowa, $A_{ij} = \delta_{ij}$, dystorsje są zerowe, $\hat{\varepsilon}_i = 0$, zaś odkształcenia całkowite są równe liniowym, $\varepsilon_i = \overset{\scriptscriptstyle L}{\varepsilon}_i$. Zatem nie musimy nawet znać odkształceniowej macierzy wpływu, D_{ij}, gdyż składowe gradientu dystorsji wyznaczamy bezpośrednio ze wzoru:

$$\frac{\partial\hat{\varepsilon}_i(\mathbf{1})}{\partial\lambda_s} = -\frac{\partial\mu_i(\mathbf{1})}{\partial\lambda_s}\,\overset{\scriptscriptstyle L}{\varepsilon}_i, \tag{5.12}$$

Algorytm 5.1. Analiza wrażliwości konstrukcji statycznej.

Dane oraz obliczenia inicjujące

1. Dane są:
   - konstrukcja pod ustalonym obciążeniem statycznym $\mathbf{Q}$,
   - lokalizacje dystorsyjne: $i, j \in \mathcal{D}$,
   - funkcja (wektorowa) modyfikacji sztywności: $\boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{\lambda}) = \left[\, \mu_i(\boldsymbol{\lambda}) \,\right]$, oraz funkcja jej gradientu $\frac{d\boldsymbol{\mu}}{d\boldsymbol{\lambda}}(\boldsymbol{\lambda}) = \left[\frac{\partial \mu_i}{\partial \lambda_s}(\boldsymbol{\lambda})\right]$,
   - wektorowa funkcja odpowiedzi: $\mathbf{f}(\mathbf{q}) = \left[\, f_\alpha(\mathbf{q}) \,\right]$.
2. Obliczamy:
   - wektory liniowej odpowiedzi konstrukcji (tj. na obc. $\mathbf{Q}$): $\overset{\mathrm{L}}{\varepsilon}_i$, $\overset{\mathrm{L}}{f}_\alpha = f_\alpha(\mathbf{q}$ dla $\mathbf{Q})$.
   - odkształceniowa macierz wpływu: D_{ij},
   - ogólna macierz wpływu: $\breve{D}_{\alpha i} = f_\alpha(\mathbf{q}$ dla $\varepsilon_i = 1)$.

Obliczenia powtarzalne

3. Pobierany jest argument w postaci wektora modyfikacji parametrów konstrukcyjnych $\boldsymbol{\lambda} = \left[\, \lambda_s \,\right]$.
4. Obliczamy modyfikacje sztywnościowe: $\mu_i = \mu_i(\boldsymbol{\lambda})$.
5. Wyznaczamy i dekomponujemy (rozkład LU) macierz: $A_{ij} = \delta_{ij} - (1 - \mu_i)\, D_{ij}$.
6. Obliczamy wektor prawej strony: $b_i = (1 - \mu_i)\, \overset{\mathrm{L}}{\varepsilon}_i$,
7. Rozwiązujemy układ równań: $\sum_{j \in \mathcal{D}} A_{ij}\, \hat{\varepsilon}_j = b_i$.

   Otrzymujemy dystorsje: $\hat{\varepsilon}_i$.
8. Obliczamy odkształcenia całkowite: $\varepsilon_i = \overset{\mathrm{L}}{\varepsilon}_i + \overset{\mathrm{R}}{\varepsilon}_i = \overset{\mathrm{L}}{\varepsilon}_i + \sum_{j \in \mathcal{D}} D_{ij}\, \hat{\varepsilon}_j$.
9. Przeprowadzamy następujące działania dla każdego s:
   - obliczamy wektor prawej strony: $B_{is} = -\dfrac{\partial \mu_i}{\partial \lambda_s}\, \varepsilon_i$, gdzie: $\dfrac{\partial \mu_i}{\partial \lambda_s} = \dfrac{\partial \mu_i}{\partial \lambda_s}(\boldsymbol{\lambda})$,
   - następnie rozwiązujemy układ równań: $\sum_{j \in \mathcal{D}} A_{ij}\, \dfrac{\partial \hat{\varepsilon}_j}{\partial \lambda_s} = B_{is}$.

   Otrzymujemy gradient dystorsji: $\dfrac{\partial \hat{\varepsilon}_i}{\partial \lambda_s}$.
10. Obliczamy wyniki:
    - gradient funkcji odpowiedzi: $\dfrac{\partial f_\alpha}{\partial \lambda_s} = \dfrac{\partial \overset{\mathrm{R}}{f}_\alpha}{\partial \lambda_s} = \sum_{i \in \mathcal{D}} \breve{D}_{\alpha i}\, \dfrac{\partial \hat{\varepsilon}_i}{\partial \lambda_s}$,
    - wartość funkcji odpowiedzi (można obliczać już po 7-ym punkcie algorytmu): $f_\alpha = \overset{\mathrm{L}}{f}_\alpha + \overset{\mathrm{R}}{f}_\alpha = \overset{\mathrm{L}}{f}_\alpha + \sum_{i \in \mathcal{D}} \breve{D}_{\alpha i}\, \hat{\varepsilon}_i$.

co oznacza, że składowe gradientu funkcji odpowiedzi są równe:

$$\frac{\partial f_\alpha(\mathbf{1})}{\partial \lambda_s} = -\sum_{i \in \mathcal{D}} \breve{D}_{\alpha i} \frac{\partial \mu_i(\mathbf{1})}{\partial \lambda_s} \overset{\mathrm{L}}{\varepsilon}_i. \tag{5.13}$$

Przypadek ten wydaje się być dosyć istotnym – często może on stanowić punkt startowy dla wielu zagadnień wykorzystujących analizę wrażliwości i opartych na procedurach iteracyjnych.

Rozdział 6

Metoda Impulsowych Dystorsji Wirtualnych (MIDW)

6.1. Wprowadzenie

Od tej chwili zajmować się będziemy analizą dynamiczną konstrukcji. Istnieje więc potrzeba wprowadzenia czynnika czasu do Metody Dystorsji Wirtualnych. Przyjmiemy zatem, że dystorsje wirtualne są teraz funkcjami zależnymi od czasu. Uzyskane odpowiedzi konstrukcji (tzw. *funkcje przejścia*) na wymuszenia zadane tymi dystorsjami, również będą funkcjami parametru t, co oznacza, że generować będą *trójwymiarową* macierz wpływu. Do tej pory oba wymiary macierzy wpływu wiązały się z położeniem elementów, w których zadawana jest dystorsja oraz w których uzyskiwana jest odpowiedź konstrukcji. Teraz dochodzi wymiar związany z dyskretyzacją przestrzeni czasowej. Ogólnie mówiąc, wielkości, które wcześniej określane były mianem wektorów[24)] (np. wektor przemieszczeń, czy też wektor odkształceń konstrukcji), a których składowe zależą od czasu, będą teraz wielkościami dwuwymiarowymi (chociaż nadal nazywane będą *wektorami*); natomiast – z tych samych względów – macierz wpływu jest (jak już wspomniano) macierzą trójwymiarową.[25)]

24) W tym kontekście chodzi raczej o tablicę jednowymiarową, a nie element przestrzeni liniowej.

25) **Umowa:** W całej pracy zachowywać będziemy, z reguły, zapis właściwy dla funkcyjnej zależności od czasu, tzn. niejako przed dyskretyzacją przestrzeni czasowej. Indeks t umieszczamy zatem tak, jak gdyby był zmienną lub parametrem, np.: $D_{ij}(t)$, $\varepsilon_i(t)$, zamiast (odpowiednio): D_{ijt}, ε_{it}. W przypadku sumowania po czasie stosowany jednak zwykle będzie znak sumy, a nie całki.

Przedstawione w niniejszym rozdziale uogólnienie MDW na zagadnienia dynamiki układów liniowych bazować będzie na tzw. *metodzie impulsowej funkcji przejścia*. Zostanie pokazane, że stanowiąca podstawę dla obliczeń numerycznych macierz wpływu tym razem obliczana będzie dla elementarnych *impulsów* dystorsji jednostkowych. Z tych powodów odpowiednią wydaje się być proponowana nazwa: **Metoda Impulsowych Dystorsji Wirtualnych**.

6.2. Wykorzystywane pojęcia

Poniżej przedstawiamy definicje podstawowych pojęć, które będą wykorzystywane do opisu Impulsowej MDW – są to:

funkcja przejścia – odpowiedź na zadane wymuszenie (np.: przemieszczenia lub odkształcenia w funkcji czasu), uzyskana w określonym miejscu konstrukcji lub (ogólniej) liniowa kombinacja różnych odpowiedzi wyznaczonych w dowolnych lokalizacjach, ale dla tego samego wymuszenia,

impulsowa funkcja przejścia – odpowiedź konstrukcji na elementarne wymuszenie przyłożone impulsowo w chwili początkowej,

impuls dystorsji jednostkowej – dystorsja jednostkowa przyłożona impulsowo w chwili początkowej,

impulsowy wektor wpływu – impulsowe funkcje przejścia (w postaci dwuwymiarowego wektora), otrzymane dla określonego impulsu dystorsji jednostkowej,

impulsowa macierz wpływu – trójwymiarowa macierz grupująca impulsowe wektory wpływu.

Jak widać niektóre z definicji są konsekwentnym uogólnieniem (na przypadek dynamiki) pojęć wykorzystywanych do opisu zagadnienia statycznej MDW. Pojęcia funkcji przejścia i impulsowej funkcji przejścia będą wykorzystywane głównie w następnym podrozdziale, natomiast w dalszej części pracy te same określenia będą z reguły służyły do określania dwuwymiarowych wektorów grupujących kolejne chwilowe wartości funkcji przejścia uzyskanych w wielu określonych lokalizacjach konstrukcji (czasem będziemy w tym kontekście używać bardziej precyzyjnego terminu – **wektor funkcji przejścia**). Zauważmy również, że funkcja przejścia to po prostu zmienna w czasie *funkcja odpowiedzi*.

6.3. Opis propagacji fali sprężystej metodą impulsowej funkcji przejścia

Jednym z podstawowych założeń, które przyjęliśmy do tej pory jest postulat małych przemieszczeń (małych drgań), czyli liniowość geometryczna. Postulat ten pozwala na stosowanie zasady superpozycji. Wiedząc o tym, do opisu propagacji fali sprężystej wymuszonej dowolną funkcją czasu, można zastosować tzw. **metodę impulsowej funkcji przejścia**. Opis tej klasycznej metody można znaleźć w wielu publikacjach dotyczących drgań układów dynamicznych, przykładowo [31, 5, 6], również w ujęciu MES [45]. W me-

todzie tej funkcję wymuszającą przedstawiamy jako sumę elementarnych impulsów siły, zaś rozwiązanie jako superpozycję rozwiązań otrzymanych dla kolejnych wymuszeń impulsowych. Szczegółowe postępowanie opiera się na rozumowaniu przedstawionym poniżej, gdzie dla prostoty ograniczono się do przypadku jednego stopnia swobody.

- Niech $Q(t)$ będzie pewną funkcją wymuszającą drgania układu o jednym stopniu swobody (rys. 6.1). Ruch układu opisany jest równaniem różniczkowym

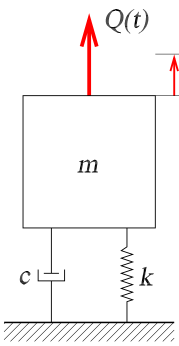
$$m\,\ddot{q}(t) + c\,\dot{q}(t) + k\,q(t) = Q(t), \tag{6.1}$$

gdzie: m jest masą ($m \neq 0$), c – tłumieniem, natomiast k – sztywnością układu. Przed scałkowaniem równanie (6.1) wygodnie jest podzielić stronami przez m i przedstawić w postaci

$$\ddot{q}(t) + 2\zeta\omega\,\dot{q}(t) + \omega^2 q(t) = \frac{Q(t)}{m}, \tag{6.2}$$

gdzie wykorzystujemy wielkości definiujące *częstość drgań własnych* oraz *bezwymiarowy parametr tłumienia* układu:

$$\omega \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{\frac{k}{m}}, \qquad \zeta \stackrel{\text{def}}{=} \frac{c}{2\,m\,\omega}. \tag{6.3}$$



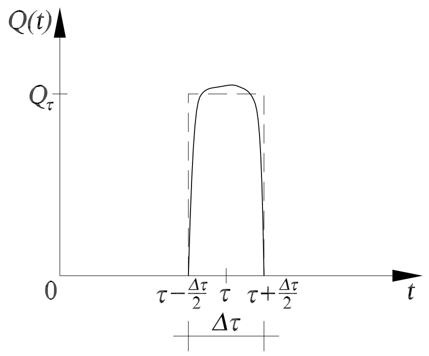
Rys. 6.1. Układ drgający o jednym stopniu swobody.

- Przyjmijmy teraz, że wymuszenie $Q(t)$ jest siłą (bliską impulsowi prostokątnemu) działającą w bardzo krótkim przedziale czasu $[\tau - \Delta\tau/2, \tau + \Delta\tau/2]$ (rys. 6.2), tzn.:

$$Q(t) = \begin{cases} 0 & \text{dla} \quad t \leqslant (\tau - \Delta\tau/2), \\ Q_\tau(t) \approx \text{const} & \text{dla} \quad (\tau - \Delta\tau/2) < t < (\tau + \Delta\tau/2), \\ 0 & \text{dla} \quad t \geqslant (\tau + \Delta\tau/2), \end{cases} \tag{6.4}$$

Wartością impulsu takiej siły nazywamy całkę oznaczoną

$$I_\tau \stackrel{\text{def}}{=} \int\limits_{\tau-\Delta\tau/2}^{\tau+\Delta\tau/2} Q(t)\,dt = Q_\tau\,\Delta\tau, \tag{6.5}$$



Rys. 6.2. Siła działająca w bardzo krótkim przedziale czasu i wartość impulsu.

gdzie Q_τ jest średnią wartością impulsu tej siły, przy czym dla $\Delta t \to 0$ powinna zachodzić prawidłowość $Q_\tau \to Q(\tau)$. Zauważmy przy okazji, że impuls I_τ ma wymiar [N s].

Dla $\Delta t \to 0$ impulsową siłę wymuszającą (6.4) możemy definiować następująco:

$$Q(t) = Q_\tau\, \delta(t-\tau), \tag{6.6}$$

gdzie wykorzystujemy dystrybucję (tj. funkcję uogólnioną) $\delta(t)$, określaną mianem *funkcji delta Diraca*[26]. Dystrybucja $\delta(t-\tau)$ opisuje działanie impulsu jednostkowego zadanego w chwili τ, przedstawionego na rys. 6.3(a).

- Rozpatrzmy teraz konkretny przypadek, gdy impuls siły wymuszającej zadany jest w chwili początkowej $\tau = 0$, czyli:

$$Q(t) = Q_0\, \delta(t). \tag{6.7}$$

Zakładamy, że masa m znajdowała się w spoczynku tuż przed przyłożeniem impulsu siły (czyli w chwili którą oznaczmy przez 0^-) – zatem: $\dot{q}(0^-) = 0$. Impuls w czasie działania bliskim zeru powoduje nagły przyrost prędkości, a więc: $\dot{q}(0) \neq 0$. Wynika

[26] Niezbyt poprawnie z punktu widzenia matematyki dystrybucję Diraca definiuje się często jako funkcję – zerową na całym zbiorze liczb rzeczywistych z wyjątkiem punktu 0, gdzie "przyjmuje" ona wartość nieograniczoną (!):

$$\delta(t) = \begin{cases} 0 & \text{dla} \ \ t \neq 0, \\ \infty & \text{dla} \ \ t = 0, \end{cases} \qquad \text{czyli} \qquad \delta(t-\tau) = \begin{cases} 0 & \text{dla} \ \ t \neq \tau, \\ \infty & \text{dla} \ \ t = \tau. \end{cases}$$

Ponadto *definiuje się* dla niej następujące własności całkowe

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)\, dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t-\tau)\, dt \overset{\text{def}}{=} 1 \quad \text{oraz} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} Q(t)\, \delta(t)\, dt \overset{\text{def}}{=} Q(0), \quad \int_{-\infty}^{+\infty} Q(t)\, \delta(t-\tau)\, dt \overset{\text{def}}{=} Q(\tau),$$

gdzie $Q(t)$ jest dowolną funkcją. Zauważmy, że wykonanie formalnego (tj. poprawnego) całkowania we wszystkich powyższych wzorach dałoby oczywiście w wyniku wartość 0 – w przypadku całki Riemanna – lub ∞ (nieskończoność aktualną!) – w przypadku całki Lebesgue'a.

to z *prawa zachowania pędu*:

$$m\,\dot{q}(0) - m\,\dot{q}(0^-) = \int_{0^-}^{0} Q(t)\,dt = I_0, \tag{6.8}$$

skąd otrzymujemy wartość prędkości, którą osiąga masa w chwili przyłożenia impulsu siły:

$$\dot{q}(0) = \frac{I_0}{m}. \tag{6.9}$$

Widać zatem, że obciążenie impulsem siły należy zastąpić warunkiem na prędkość początkową.

- Korzystając z przeprowadzonego rozumowania przemieszczenia układu poddanego obciążeniu impulsowemu (6.7) wyznaczymy całkując równanie jednorodne

$$m\,\ddot{q}(t) + c\,\dot{q}(t) + k\,q(t) = 0, \tag{6.10}$$

z warunkami początkowymi o zerowym przemieszczeniu i niezerowej prędkości początkowej (której wartość zależy od wielkości impulsu i masy układu):

$$\begin{cases} q(0) = 0, \\ \dot{q}(0) = \dfrac{I_0}{m}. \end{cases} \tag{6.11}$$

Dla rozpatrywanego układu o jednym stopniu swobody łatwo znajdujemy rozwiązanie analityczne w następującej formie:

$$q(t) = \frac{I_0}{m\,\omega_{\mathrm{d}}} \exp(-\zeta\omega\,t)\sin(\omega_{\mathrm{d}}\,t), \qquad (t \geqslant 0), \tag{6.12}$$

gdzie wykorzystano oznaczenie opisujące tzw. *częstość kołową drgań tłumionych*:

$$\omega_{\mathrm{d}} \stackrel{\mathrm{def}}{=} \omega\sqrt{1-\zeta^2}, \tag{6.13}$$

oraz przyjęto, że tłumienie układu jest *podkrytyczne* ($c < c_{\mathrm{kr}} = 2\,m\,\omega$), co oznacza, że $0 < \zeta < 1$.

- Rozwiązanie (6.12) zapiszmy w postaci

$$q(t) = I_0\,h_0(t), \tag{6.14}$$

gdzie pojawia się tzw. **impulsowa funkcja przejścia**[27)]

$$h_0(t) = \begin{cases} 0 & \text{dla} \quad t < 0, \\ \dfrac{1}{m\,\omega_{\mathrm{d}}} \exp(-\zeta\omega\,t)\sin(\omega_{\mathrm{d}}\,t) & \text{dla} \quad t \geqslant 0. \end{cases} \tag{6.15}$$

Łatwo zauważyć, że funkcja ta jest rozwiązaniem uzyskanym dla wymuszenia impulsem jednostkowym $I_0 = 1$, zadanym w chwili początkowej $\tau = 0$.

27) Opisuje ona odpowiedź układu w dziedzinie czasu. W dziedzinie częstotliwości można przeprowadzać analogiczną analizę – odpowiedź układu opisuje tam tzw. *funkcja przenoszenia* (*transmitancja*).

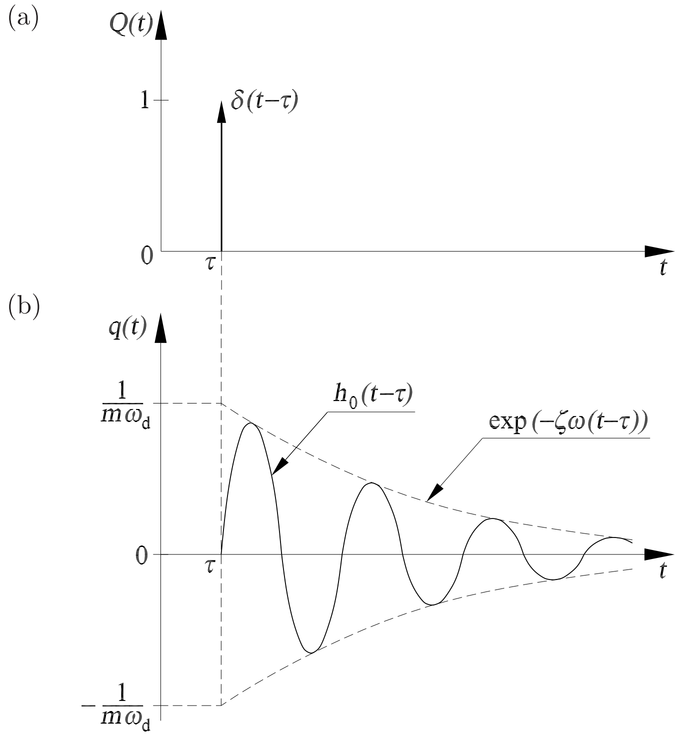
- Rozwiązaliśmy zagadnienie drgań układu obciążonego impulsowo w chwili początkowej. Otrzymany wynik można uogólnić dla impulsu siły przyłożonej w dowolnej chwili τ, czyli dla obciążenia (6.6). Rozwiązanie, czyli funkcję przemieszczenia możemy od razu przedsatwić w postaci:

$$q(t) = I_\tau \, h_\tau(t) = I_\tau \, h_0(t-\tau), \tag{6.16}$$

wykorzystując fakt, iż funkcja przejścia dla impulsu jednostkowego zadanego w chwili τ jest niejako "przesunięciem w czasie" (o czas τ) funkcji przejścia od impulsu zadanego w chwili początkowej, czyli:

$$h_\tau(t) = h_0(t-\tau) = \begin{cases} 0 & \text{dla} \;\; t < \tau, \\ \dfrac{1}{m\,\omega_\mathrm{d}} \exp\big(-\zeta\omega\,(t-\tau)\big)\sin\big(\omega_\mathrm{d}\,(t-\tau)\big) & \text{dla} \;\; t \geqslant \tau. \end{cases} \tag{6.17}$$

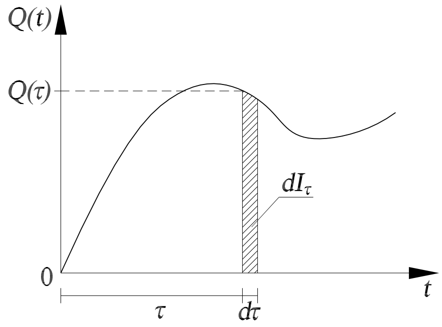
Impulsową funkcję przejścia (6.17) wraz z odpowiadającym jej wymuszeniem (6.6) przedstawiono na rys. 6.3.



Rys. 6.3. (a) Wymuszenie impulsowe. (b) Impulsowa funkcja przejścia dla układu tłumionego.

- Rozpatrzmy teraz ogólny przypadek obciążenia dowolną funkcją czasu. Zauważmy, że dowolną funkcję wymuszającą $Q(t)$ można rozpatrywać jako złożenie sekwencyjnie następujących po sobie elementarnych impulsów o wielkościach równych wartościom tej funkcji w kolejnych chwilach τ (rys. 6.4):

$$dI_\tau \stackrel{\text{def}}{=} Q(\tau)\,d\tau. \tag{6.18}$$



Rys. 6.4. Przykład siły wymuszającej o dowolnej postaci z wyróżnionym elementarnym impulsem.

Odpowiedź układu (liniowego) będzie superpozycją rozwiązań uzyskanych dla kolejnych wymuszeń impulsowych.
Zgodnie z rozwiązaniem (6.16), odpowiedź przemieszczeniowa układu na elementarny impuls (6.18) zadany w chwili τ ma postać

$$dq_\tau(t) = dI_\tau\, h_0(t-\tau) = \big[Q(\tau)\, d\tau\big]\, h_0(t-\tau). \tag{6.19}$$

Sumując odpowiedzi na wszystkie elementarne impulsy w przedziale czasu $\langle 0, t\rangle$ otrzymujemy rozwiązanie jako tzw. *całkę Duhamela*

$$q(t) = \int_{dq_{\tau=0}}^{dq_{\tau=t}} dq_\tau = \int_0^t Q(\tau)\, h_0(t-\tau)\, d\tau, \tag{6.20}$$

którą dla podkrytycznie tłumionego układu o jednym stopniu swobody, zgodnie z rozwiązaniem (6.17), przedstawiamy w następującej formie

$$\begin{aligned} q(t) &= \frac{1}{m\,\omega_\mathrm{d}} \exp(-\zeta\omega\, t) \int_0^t Q(\tau)\, \exp(\zeta\omega\,\tau) \sin\!\big(\omega_\mathrm{d}\,(t-\tau)\big)\, d\tau \\ &= \frac{1}{m\,\omega_\mathrm{d}} \int_0^t Q(t-\tau)\, \exp(\zeta\omega\,\tau) \sin(\omega_\mathrm{d}\,\tau)\, d\tau. \end{aligned} \tag{6.21}$$

Istotą przeprowadzonego postępowania jest to, że otrzymane rozwiązanie (całka Duhamela) służy do wyznaczenia odpowiedzi układu liniowego na wymuszenie o (prawie) dowolnej postaci[28)].

Wyprowadzone powyżej wzory należy uogólnić dla układu o dowolnej (skończonej) liczbie stopni swobody. Odpowiedź dynamiczna takiego układu na obciążenie dowolnym wektorem funkcji wymuszających drgania $\mathbf{Q}(t)$ opisana jest równaniem ruchu

$$\mathbf{M}\,\ddot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{C}\,\dot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{K}\,\mathbf{q}(t) = \mathbf{Q}(t), \tag{6.22}$$

[28)] Postać ta musi tylko spełniać pewne warunki matematyczne (wystarczy, aby to była funkcja całkowalna z kwadratem, czyli opisująca sygnał o skończonej energii).

gdzie: **M**, **C**, **K** to (odpowiednio) *macierz bezwładności*, *macierz tłumienia* oraz *macierz sztywności* układu. Odpowiedź tę wyznaczyć można korzystając z *macierzowego sformułowania całki Duhamela*:

$$\mathbf{q}(t) = \int_0^t \mathbf{h}(t-\tau)\,\mathbf{Q}(\tau)\,d\tau, \qquad \text{czyli} \qquad q_i(t) = \int_0^t \sum_j h_{ij}(t-\tau)\,Q_j(\tau)\,d\tau, \tag{6.23}$$

gdzie wykorzystujemy tzw. **macierz impulsowych funkcji przejścia**[29)]

$$\mathbf{h}(t) = \left[h_{ij}(t)\right], \tag{6.24}$$

której element $h_{ij}(t)$ definiujemy jako odpowiedź i-tej współrzędnej uogólnionej układu spowodowaną działaniem impulsu jednostkowego zadanego w chwili $\tau = 0$ w kierunku współrzędnej uogólnionej j, założywszy ponadto, że układ dynamiczny znajdował się w stanie spoczynku przed początkiem działania impulsu, tzn.

$$h_{ij}(t) = 0 \quad \text{dla} \quad t < 0. \tag{6.25}$$

Rozwiązanie (6.23) pozwala na obliczenie odpowiedzi układu dynamicznego na dowolne wymuszenie, o ile znana jest macierz impulsowych funkcji przejścia. Macierz tę można wyznaczyć dwoma sposobami:

1. sposób przez odwrócenie macierzy,
2. sposób superpozycji postaci drgań własnych (tzw. *superpozycja modalna*).

Oba sposoby w praktycznym zastosowaniu podlegają znacznym ograniczeniom.

6.4. Dyskretny opis propagacji fali na bazie impulsowej macierzy wpływu

Analiza dokonana w poprzednim podrozdziale dotyczy problemów dyskretnych tylko pod względem przestrzennym – oznacza to dyskretyzację tylko samej konstrukcji, przy zachowaniu ciągłości przestrzeni czasowej. Pociąga to za sobą trudności i ograniczenia w praktycznym stosowaniu tego typu metodologii.

Odtąd będziemy wykorzystywać podejście bazujące na dyskretnych metodach rozwiązywania równań ruchu[30)]. Postulujemy więc dyskretyzację przestrzeni czasowej na n przedziałów Δt, czyli $n+1$ punktów czasowych: $t = 0, \ldots, n$.

Ideę macierzy impulsowych funkcji przejścia zastosujemy do macierzy wpływu, którą w konsekwencji nazywać będziemy **impulsową macierzą wpływu** i (w celu odróżnienia od statycznych macierzy wpływu, **D** lub $\breve{\mathbf{D}}$) oznaczać z zawsze jawnym indeksem t, parametryzującym dyskretną przestrzeń czasu[31)]:

$$\mathbf{D}(t) = \left[D_{ij}(t)\right] \quad \text{oraz} \quad \breve{\mathbf{D}}(t) = \left[\breve{D}_{ij}(t)\right]. \tag{6.26}$$

[29)] Podkreślmy, że chodzi tutaj o dwuwymiarową macierz, której elementami są funkcje opisujące zależność od czasu (tj. przed dyskretyzacją przestrzeni czasowej).

[30)] Chodzi tu zwłaszcza o tzw. *metodę Newmarka* numerycznego całkowania równania ruchu. Po niewielkich modyfikacjach można jednak stosować analogiczne metody, np. metodę Wilsona, Houbolta i inne.

[31)] Patrz przypis 25, str. 91.

Jak już stwierdzono we wprowadzeniu do tego rozdziału, uwydatniona w powyższym oznaczeniu zależność od czasu, w powiązaniu z faktem dyskretyzacji przestrzeni czasowej oznacza, iż będzie to macierz *trójwymiarowa*. Element tej macierzy opisuje odpowiedź dynamiczną konstrukcji ($D_{ij}(t)$ = odkształcenie w lokalizacji i) w chwili t na *impuls dystorsji jednostkowej* zadany w lokalizacji j i chwili zerowej. Przypomnijmy, że pojęcie "lokalizacji" definiowane jest tutaj przez konkretny stan odkształcenia na określonym elemencie skończonym konstrukcji.

Idea impulsu dystorsji jednostkowej oraz przepis obliczania impulsowej macierzy wpływu zostaną dokładnie przedstawione w następnych dwóch podrozdziałach. Natomiast teraz zauważmy, że macierz (6.26) powinna służyć do superpozycji odpowiedzi uzyskanych od sekwencyjnie następujących w kolejnych chwilach τ elementarnych impulsów dystorsyjnych. Jest więc jeszcze potrzebna odpowiedź dynamiczna konstrukcji na impulsy dystorsyjne zadane w chwilach $\tau > 0$. Zatem konsekwentnie należałoby obliczyć macierze wpływu $\mathbf{D}_\tau(t)$ (oraz $\breve{\mathbf{D}}_\tau(t)$) dla impulsów zadanych we wszystkich pozostałych chwilach $\tau = 1, \ldots, n$. Jednak, podobnie jak w przypadku macierzy $\mathbf{h}(t)$, nie jest to konieczne dzięki zależności analogicznej do wyrażenia (6.17):

$$\mathbf{D}_\tau(t) = \begin{cases} \mathbf{0} & \text{dla} \quad t < \tau, \\ \mathbf{D}(t-\tau) & \text{dla} \quad t \geqslant \tau. \end{cases} \tag{6.27}$$

Dla $\breve{\mathbf{D}}_\tau(t)$ – analogicznie. Jak widać macierz wpływu wyznaczona dla impulsu dystorsji przyłożonego w chwili $\tau > 0$ ma przekroje zerowe dla wszystkich $t < \tau$, zaś dla $t \geq \tau$ stanowi odpowiedni początkowy fragment macierzy $\mathbf{D}(t)$, obliczonej dla impulsu zadanego w chwili zerowej. Zatem (co jest ogromnie istotne) wystarczy obliczyć tylko tę jedną impulsową macierz wpływu $(6.26)_1$ (i analogicznie również $(6.26)_2$). Możemy wtedy wyznaczać odpowiedź konstrukcji (odkształceniową oraz ogólną) na nałożone na nią dowolne dynamiczne dystorsje wirtualne – odpowiednio:

$$\overset{\mathrm{R}}{\boldsymbol{\varepsilon}}(t) = \sum_{\tau=0}^{t} \mathbf{D}(t-\tau)\,\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}(\tau), \qquad \text{czyli} \qquad \overset{\mathrm{R}}{\varepsilon}_i(t) = \sum_{\tau=0}^{t}\sum_{j\in\mathcal{D}} D_{ij}(t-\tau)\,\hat{\varepsilon}_j(\tau), \tag{6.28}$$

$$\overset{\mathrm{R}}{\mathbf{f}}(t) = \sum_{\tau=0}^{t} \breve{\mathbf{D}}(t-\tau)\,\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}(\tau), \qquad \text{czyli} \qquad \overset{\mathrm{R}}{f}_\alpha(t) = \sum_{\tau=0}^{t}\sum_{i\in\mathcal{D}} \breve{D}_{\alpha i}(t-\tau)\,\hat{\varepsilon}_i(\tau). \tag{6.29}$$

Te zmienne w czasie funkcje dystorsji wirtualnych, $\hat{\varepsilon}_i(t)$, można wykorzystać do modelowania wpływu, np.: defektów albo zmian parametrów projektowych wpływających na sztywność konstrukcji obciążonej dynamicznie.

Zauważmy, że podobnie jak w statyce, również w zagadnieniach dynamiki funkcja przejścia składa się z części $\overset{\mathrm{L}}{f}_\alpha(t)$, będącej liniową odpowiedzią układu na wymuszenie obciążeniem dynamicznym, oraz z czynnika $\overset{\mathrm{R}}{f}_\alpha(t)$ wynikającego z nałożonych zmiennych w czasie dystorsji wirtualnych:

$$f_\alpha(t) = \overset{\mathrm{L}}{f}_\alpha(t) + \overset{\mathrm{R}}{f}_\alpha(t) = \overset{\mathrm{L}}{f}_\alpha(t) + \sum_{\tau=0}^{t}\sum_{i\in\mathcal{D}} \breve{D}_{\alpha i}(t-\tau)\,\hat{\varepsilon}_i(\tau). \tag{6.30}$$

Podobnie jest z funkcjami odkształceń całkowitych wyznaczonymi w lokalizacjach dystorsyjnych $i \in \mathcal{D}$:

$$\varepsilon_i(t) = \overset{\scriptscriptstyle L}{\varepsilon}_i(t) + \overset{\scriptscriptstyle R}{\varepsilon}_i(t) = \overset{\scriptscriptstyle L}{\varepsilon}_i(t) + \sum_{\tau=0}^{t} \sum_{j \in \mathcal{D}} D_{ij}(t-\tau)\,\hat{\varepsilon}_j(\tau). \tag{6.31}$$

Zauważmy teraz, że efekt nałożenia dystorsji wirtualnej na konstrukcję (zarówno statycznej jak i dynamicznej[32)]) uzyskuje się w ramach MES poprzez obciążenie samorównoważącym się układem uogólnionych sił węzłowych. Zatem można stwierdzić, iż pewne układy obciążeń – statycznych lub dynamicznych – można utożsamiać, czy też modelować poprzez ekwiwalentne im stany dystorsyjne lub zależne od czasu funkcje dystorsji wirtualnych. Te modelowalne układy obciążeń muszą wiązać się z dystorsyjnym obciążeniem kompensacyjnym elementu[33)]. Przyjmijmy więc, że $\hat{\varepsilon}_w(\tau)$ są funkcjami dystorsji modelującymi wymuszenie zadane w lokalizacjach $w \in \mathcal{W}$. Odpowiedź konstrukcji na tego typu wymuszenia można łatwo wyznaczyć jeśli mamy obliczoną odpowiednią impulsową macierz wpływu:

$$\overset{\scriptscriptstyle L}{\varepsilon}_i(t) = \sum_{\tau=0}^{t} \sum_{w \in \mathcal{W}} D_{iw}(t-\tau)\,\hat{\varepsilon}_w(\tau). \tag{6.32}$$

Należy szczególnie podkreślić, że zmagazynowana macierz wpływu $\big[D_{iw}(t)\big]$ pozwala na wyznaczenie funkcji przejścia dla sygnału wzbudzającego o dowolnej postaci. Dystorsje mogą być więc również wykorzystywane w celu modelowania sygnału wymuszającego.

Funkcje przejścia opisujące propagację fal w układach dynamicznych można zatem rozpatrywać jako będące wynikiem dystorsji dynamicznych modelujących wymuszenie (w lokalizacjach $w \in \mathcal{W}$) oraz wpływy związane np. z pojawieniem się uszkodzeń (w lokalizacjach dystorsyjnych $j \in \mathcal{D}$):

$$\begin{aligned}\varepsilon_i(t) &= \sum_{\tau=0}^{t} \sum_{w \in \mathcal{W}} D_{iw}(t-\tau)\,\hat{\varepsilon}_w(\tau) + \sum_{\tau=0}^{t} \sum_{j \in \mathcal{D}} D_{ij}(t-\tau)\,\hat{\varepsilon}_j(\tau) \\ &= \sum_{\tau=0}^{t} \sum_{k \in \mathcal{W} \cup \mathcal{D}} D_{ik}(t-\tau)\,\hat{\varepsilon}_k(\tau),\end{aligned} \tag{6.33}$$

przy czym zbiory $\mathcal{W}$ i $\mathcal{D}$ nie muszą być rozłączne i dla każdego $k \in \mathcal{W} \cap \mathcal{D}$ musimy uwzględnić sumaryczny wpływ obu typów dystorsji, tj.: $\hat{\varepsilon}_k(t) = \sum_w \delta_{kw}\,\hat{\varepsilon}_w(t) + \sum_j \delta_{kj}\,\hat{\varepsilon}_j(t)$. Na koniec zauważmy jednak, że w praktyce zazwyczaj lepiej jest wpływ *znanego* wymuszenia realizować w klasyczny sposób (tj. nie korzystając z dystorsji i macierzy wpływu), natomiast istotą zastosowania dystorsji wirtualnych pozostaje modelowanie modyfikacji konstrukcji nie wprowadzające zmian w jej pierwotnym modelu.

32) Patrz następny podrozdział.

33) W tym kontekście zauważmy, że dystorsje dobrze nadają się do uproszczonego modelowania oddziaływań piezoeleketryków naklejonych na elementy konstrukcji. Zagadnienie *piezodiagnostyki* poruszone zostanie w rozdziale 8.2.

6.5. Impuls dystorsji jednostkowej

Wiemy, że wpływ *statycznej* dystorsji jednostkowej $\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}^{(e)}$ na konstrukcję realizujemy poprzez zadanie samorównoważącego się układu uogólnionych sił węzłowych $\hat{\mathbf{Q}}^{(e)}$ przyłożonych w węzłach tego elementu e, w którym to jednostkowe odkształcenie wstępne ma być zrealizowane. Transformując ten lokalny układ sił do globalnego układu odniesienia konstrukcji otrzymujemy obciążenie dystorsyjne $\hat{\mathbf{Q}}$, ekwiwalentne dla dystorsji $\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}^{(e)}$. Można teraz wyznaczyć statyczną odpowiedź sprężystą konstrukcji na lokalne zaburzenie dystorsyjne. W przypadku zagadnień dynamiki to podejście nieco się komplikuje – dystorsja jest tutaj bowiem funkcją odkształceń zmiennych w czasie, natomiast elementarnym stanem dystorsyjnym potrzebnym do obliczenia macierzy wpływu jest tzw. **impuls dystorsji jednostkowej**, czyli po prostu wstępne odkształcenie jednostkowe dynamicznie wymuszone w chwili początkowej. Realizujemy go za pomocą impulsu obciążenia kompensacyjnego

$$\mathbf{Q}(t) = \hat{\mathbf{Q}}\,\delta(t), \tag{6.34}$$

co oznacza dynamiczne, impulsowe przyłożenie uogólnionych sił węzłowych tworzących układ samorównoważący się (ten sam co w przypadku dystorsji statycznej).

Pokazaliśmy, że impuls siły wymuszającej $\hat{Q}\,\delta(t)$ można zastąpić warunkiem na prędkość początkową, $\dot{q}(0) = \hat{v}_0$. Aby wyznaczyć $\hat{v}_0$, korzystamy z II zasady dynamiki Newtona (czyli prawa zachowania pędu):

$$m\frac{\hat{v}_0 - 0}{\Delta t} = \hat{Q}, \tag{6.35}$$

skąd otrzymujemy wartość prędkości początkowej, którą należy nadać masie m (uzyskując w ten sposób efekt adekwatny dla wymuszenia impulsem siły $\hat{Q}$):

$$\hat{v}_0 = \frac{\hat{Q}\Delta t}{m}. \tag{6.36}$$

Dla ogólnego przypadku wymuszenia impulsem dystorsji jednostkowej, gdzie *uogólnione* siły wymuszające przykładamy impulsowo w wielu węzłach konstrukcji (zgodnie z wektorem obciążenia dystorsyjnego $\hat{\mathbf{Q}}$), obliczamy tzw. **wektor adekwatnych prędkości początkowych**, $\hat{\mathbf{v}}_0$, korzystając z macierzowego sformułowania prawa zachowania pędu:

$$\mathbf{M}\,\hat{\mathbf{v}}_0 = \hat{\mathbf{Q}}\,\Delta t. \tag{6.37}$$

Drgania konstrukcji poddanej wymuszeniu impulsowemu obliczamy całkując *jednorodne* równania ruchu (tzn. przy zerowym obciążeniu zewnętrznym $\mathbf{Q}(t) \equiv \mathbf{0}$)

$$\mathbf{M}\,\ddot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{C}\,\dot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{K}\,\mathbf{q}(t) = \mathbf{0}, \tag{6.38}$$

z warunkami początkowymi o wyzanczonym z równania (6.37) adekwatnym wektorze prędkości $\hat{\mathbf{v}}_0$ (i zerowym wektorze przemieszczeń początkowych). Obliczona odpowiedź konstrukcji to oczywiście impulsowe funkcja przejścia, stanowiąca podstawę do określenia impulsowego wektora wpływu.

6.6. Impulsowa macierz wpływu[34)]

6.6.1. Algorytm wyznaczania impulsowej macierzy wpływu

- Wyznaczamy wektor obciążenia statycznego $\hat{\mathbf{Q}}$ ekwiwalentnego określonej dystorsji jednostkowej j.
- Z układu równań prawa zachowania pędu, $\mathbf{M}\,\hat{\mathbf{v}}_0 = \hat{\mathbf{Q}}\,\Delta t$, obliczamy wektor prędkości początkowych $\hat{\mathbf{v}}_0$ adekwatny impulsowi dystorsji jednostkowej.
- Całkujemy numerycznie jednorodne równania ruchu, $\mathbf{M}\,\ddot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{C}\,\dot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{K}\,\mathbf{q}(t) = \mathbf{0}$, wykorzystując *metodę Newmarka* (dla tzw. wariantu średniego przyspieszenia[35)]), z następującymi warunkami początkowymi:

$$\begin{cases} \mathbf{q}(0) = \mathbf{0}, \\ \dot{\mathbf{q}}(0) = \hat{\mathbf{v}}_0. \end{cases} \tag{6.39}$$

  Jak widać warunki początkowe na przemieszczenia są zerowe, natomiast prędkości początkowe są adekwatne dla impulsu dystorsji jednostkowej. Jako wynik całkowania numerycznego otrzymujemy m.in. wektor przemieszczeń konstrukcji $\mathbf{q}(t)$.
- Wykorzystując wektor $\mathbf{q}(t)$ obliczamy interesujące nas impulsowe funkcje przejścia (np. odkształceniowe), które stanowić będą j-tą (dwuwymiarową) kolumnę macierzy $\tilde{\mathbf{D}} = \big[\tilde{D}_{ij}(t)\big]$. Wbrew oczekiwaniom macierz ta nie jest jeszcze impulsową macierzą wpływu. Można ją jednak nazwać **przybliżoną impulsową macierzą wpływu**[36)], z uwagi na to, że wraz ze zmniejszaniem przyrostu czasowego Δt, składowe tej macierzy będą coraz mniej różnić się od składowych *dokładnej* impulsowej macierzy wpływu.
- Znając $\tilde{D}_{ij}(t)$ obliczamy składowe **impulsowej macierzy wpływu** korzystając z poniższych wzorów[37)]:

$$\begin{aligned} D_{ij}(0) &= \frac{1}{2}\tilde{D}_{ij}(0) + \frac{1}{4}\tilde{D}_{ij}(1) = \frac{1}{4}\tilde{D}_{ij}(1), \\ D_{ij}(t) &= \frac{1}{4}\tilde{D}_{ij}(t-1) + \frac{1}{2}\tilde{D}_{ij}(t) + \frac{1}{4}\tilde{D}_{ij}(t+1) \quad \text{dla} \quad t > 0. \end{aligned} \tag{6.40}$$

  We wzorze $(6.40)_1$ skorzystano z własności, że dla $t = 0$ przybliżona macierz wpływu ma przekrój zerowy: $\tilde{\mathbf{D}}(0) = \mathbf{0}$. Ponadto, jak widać ze wzoru $(6.40)_2$, aby obliczyć

[34)] **Uwaga:** Podrozdział dotyczy oczywiście dowolnej macierzy wpływu (zarówno ogólnej jak i odkształceniowej), choć stosować będziemy oznaczenia przyjęte dla macierzy odkształceniowej, jako najbardziej istotnej w dalszych rozważaniach.

[35)] Przyjmujemy zatem następujące wartości dla parametrów metody: $\gamma = 0{,}5$, $\beta = 0{,}25$. Zwykle wartości te są uznawane za standardowe.

[36)] Macierz ta wykorzystywana była w pierwotnej, początkowej wersji prezentowanej metody [28, 29, 30]. Ma ona bardzo istotną i pożądaną własność: $\tilde{\mathbf{D}}(0) = \mathbf{0}$. Stosowane tutaj uściślenie (6.40) można zrealizować już na poziomie wektora przemieszczeń węzłowych.

[37)] Współczynniki występujące w formułach (6.40) (w zalecanym przypadku są to 1/4, 1/2 i 1/4) zależą od przyjętego wariantu metody Newmarka, czyli od jej parametrów, w literaturze zwykle oznaczanych przez γ, β (patrz przypis 35).

t-ty przekrój macierzy wpływu, $\mathbf{D}(t)$, musimy znać $\tilde{\mathbf{D}}(t+1)$. Zatem w przypadku podziału całkowitego czasu analizy dynamicznej na n przedziałów o długości Δt, musimy pamiętać, aby całkowanie metodą Newmarka przeprowadzić dla zakresu czasu równego $(n+1)\Delta t$, czyli dłuższego o jeden przyrost czasowy Δt od przyjętego całkowitego czasu analizy. W praktyce w żaden sposób nie zwiększy to istotnie kosztów numerycznych (gdyż liczba kroków czasowych jest zwykle na tyle duża, że: $n \approx n+1$), należy jednakże pamiętać, iż macierz $\mathbf{D}$ ma $(n+1)$ przekrojów czasowych, podczas gdy macierz $\tilde{\mathbf{D}}$ musi mieć ich o jeden więcej[38)].

6.6.2. Weryfikacja numeryczna

Przeprowadzono kilka testów w celu zweryfikowania poprawności opracowanego algorytmu i bazujących na nim obliczeń. Testy dotyczyły analizy dynamicznej konstrukcji ramowo-kratowych i polegały na porównaniu wyników otrzymanych z całkowania równań ruchu standardową metodą Newmarka z wynikami uzyskanymi z sumowania bazującego na obliczonej impulsowej macierzy wpływu (IMW). Przypomnijmy, że do obliczenia IMW wykorzystano również metodę Newmarka o tych samych standardowych parametrach. Dla rozpatrywanych przykładów względne różnice w otrzymanych wynikach, wyznaczane według formuły

$$\Delta\varepsilon_{\text{Newmark–IMW}} = \frac{\varepsilon_{\text{Newmark}} - \varepsilon_{\text{IMW}}}{\varepsilon_{\text{Newmark}}}, \tag{6.41}$$

dla dowolnego punktu czasowego i dowolnych lokalizacji nie przekraczały rzędu 10^{-13}, a więc miały wybitnie charakter błędu numerycznego.

Ciekawych spostrzeżeń dokonano analizując prosty przykład pręta obciążonego zmienną harmonicznie siłą osiową [30]. Dzięki porównaniu z rozwiązaniem ścisłym oraz wynikami otrzymanymi przy zastosowaniu przybliżonej IMW, jak również innych niż Newmark metod numerycznego całkowania równań ruchu stwierdzono, że:

- rezultaty otrzymane z bezpośredniego całkowania metodą Newmarka oraz z superpozycji wykorzystującej *dokładną* IMW są w praktyce identyczne dla dowolnej (nawet niedopuszczalnie małej) liczby punktów czasowych, natomiast różnią się od nich wyniki uzyskane przy wykorzystaniu *przybliżonej* IMW,
- niedokładność rozwiązania przybliżoną IMW (rozumiana jako odmienność od wyników dokładnej IMW) maleje szybko wraz ze wzrostem liczby punktów czasowych i jest znacząco mniejsza od różnicy pomiędzy wynikami numerycznymi, a rozwiązaniem ścisłym,
- niedokładność ta jest mniejsza, choć porównywalna z różnicami uzyskiwanymi w wyniku porównania z rezultatami całkowania innymi metodami numerycznymi (np. *metodą Wilsona*).

Analiza obliczanych macierzy wpływu wykazała lub potwierdziła cechy IMW przedstawione poniżej.

[38)] Oczywiście z uwagi na rozmiar macierzy wpływu implementacja algorytmu oszczędnie gospodaruje pamięcią komputera – macierz $\tilde{\mathbf{D}}$ nie jest przechowywana, lecz dla każdej j-tej kolumny dwuwymiarowej od razu obliczana jest odpowiednia kolumna macierzy $\mathbf{D}$.

6.6.3. Własności

Na wstępie zauważmy dość oczywisty fakt, że każdy z czasowych przekrojów impulsowej macierzy wpływu zachowuje cechy charakterystyczne dla statycznej macierzy wpływu omówione w rozdziale 2. Pozostałe cechy macierzy impulsowej będą się wiązać z właściwą już tylko dla niej zależnością od czasu. Zauważmy najpierw, że:

1. przekrój przybliżonej IMW dla $t = 0$ jest zerowy, tj.: $\tilde{\mathbf{D}}(0) = \mathbf{0}$, co wynika z przyjęcia zerowych przemieszczeń początkowych. Prowadzi to do wzoru $(6.40)_1$ na składowe $D_{ij}(0)$, sugerującego, że bezwzględne wartości składowych $|D_{ij}(0)|$ powinny być mniejsze od $|D_{ij}(t)|$ dla $t > 0$. Z oczywistych względów nie jest to zawsze spełniona prawidłowość (zwłaszcza dla $t \gg 0$), jednakże można stwierdzić, że składowe przekroju dla chwili zerowej będą bliższe zeru niż składowe dla chwil kolejnych.[39)]

Kolejne cechy ujawniają się przy dobrej dyskretyzacji czasowej, tzn. dobrze dobranym, odpowiednio małym przyroście Δt. Można stwierdzić, że im mniejsza wartość przyrostu tym silniej realizować się będą następujące własności:

2. bezwzględne wartości składowych macierzy są liczbami znacząco mniejszymi od jedności, tj.: $|D_{ij}(t)| \ll 1$, jak również (konsekwentnie): $|\tilde{D}_{ij}(t)| \ll 1$;
3. zasadną staje się nazwa *przybliżona* IMW opisująca fakt, że

$$\tilde{\mathbf{D}}(t) \approx \mathbf{D}(t) = \frac{1}{4}\tilde{\mathbf{D}}(t-1) + \frac{1}{2}\tilde{\mathbf{D}}(t) + \frac{1}{4}\tilde{\mathbf{D}}(t+1),$$

   ponieważ dla niewielkiego przyrostu Δt sąsiednie przekroje czasowe są porównywalne: $\tilde{\mathbf{D}}(t-1) \approx \tilde{\mathbf{D}}(t) \approx \tilde{\mathbf{D}}(t+1)$.

Wszystkie powyższe cechy można zapisać w postaci następującego wyrażenia:

$$|D_{ij}(0)|\text{“}\leqslant\text{”}|D_{ij}(t) \approx \tilde{D}_{ij}(t)| \ll 1,$$

w którym operatory relacji (zwłaszcza pierwszy z nich) należy traktować raczej jako ukazujące pewne tendencje, niż zawsze spełnione prawidłowości.

6.7. Modelowanie dystorsjami zmiany parametrów konstrukcji pod obciążeniem dynamicznie zmiennym

W rozdziałach 2.2 oraz 4.2 wyprowadzono związki pozwalające na wykorzystanie dystorsji wirtualnych do modelowania parametrów projektowych konstrukcji pod obciążeniem statycznym. Analogiczne postępowanie można przeprowadzić dla przypadku konstrukcji obciążonej dynamicznie. Siły wewnętrzne, odkształcenia oraz dystorsje wirtualne stają się funkcjami czasu, a zależności pomiędzy nimi muszą być spełnione w kolejnych chwilach. Łatwo zatem wyprowadzamy odpowiednik równania (2.9) dla zagadnień modelowania dystorsjami w dynamice

$$\hat{\varepsilon}_i(t) = (1 - \mu_i)\,\varepsilon_i(t). \tag{6.42}$$

[39)] Cecha ta jest tutaj wzmiankowana tylko ze względu na pewne istotne (choć nie zalecane) uproszczenie prezentowanych dalej algorytmów, bazujące na przybliżeniu, że $D_{ij}(0) \approx 0$.

Podobnie, postępując w sposób przedstawiony w rozdziale 2.2, otrzymujemy analogiczne do układu równań (4.10) związki

$$\sum_{\tau=0}^{t} \sum_{j\in\mathcal{D}} \Big[\delta_{t\tau}\,\delta_{ij} - (1-\mu_i)\,D_{ij}(t-\tau)\Big]\,\hat{\varepsilon}_j(\tau) = (1-\mu_i)\,\overset{\mathrm{L}}{\varepsilon}_i(t). \tag{6.43}$$

Zauważmy, że równanie powyższe uzyskamy od razu, bezpośrednio przez podstawienie wyrażenia (6.31) do związku (6.42).

Można stwierdzić, że rozwiązywanie układów równań (6.43) jest nieefektywne w praktycznym zastosowaniu (bardzo dużo układów równań o różnych macierzach głównych), dlatego też przekształcamy je do następującej postaci: dla $t = 0$ dostajemy układ równań zupełnie analogiczny do układu (4.10)

$$\sum_{j\in\mathcal{D}} \Big[\delta_{ij} - (1-\mu_i)\,D_{ij}(0)\Big]\,\hat{\varepsilon}_j(0) = (1-\mu_i)\,\overset{\mathrm{L}}{\varepsilon}_i(0), \tag{6.44a}$$

natomiast dla $t > 0$ otrzymujemy kolejne układy równań liniowych

$$\sum_{j\in\mathcal{D}} \Big[\delta_{ij} - (1-\mu_i)\,D_{ij}(0)\Big]\,\hat{\varepsilon}_j(t) = (1-\mu_i)\,\Big[\overset{\mathrm{L}}{\varepsilon}_i(t) + \sum_{\tau=0}^{t-1} \sum_{j\in\mathcal{D}} D_{ij}(t-\tau)\,\hat{\varepsilon}_j(\tau)\Big]. \tag{6.44b}$$

Można stwierdzić, iż w celu otrzymania wyrażeń (6.44) zastosowano proste przekształcenie wykorzystujące następującą zależność:

$$\overset{\mathrm{R}}{\varepsilon}_i(t) = \sum_{\tau=0}^{t} \sum_{j\in\mathcal{D}} D_{ij}(t-\tau)\,\hat{\varepsilon}_j(\tau) = \begin{cases} \displaystyle\sum_{j\in\mathcal{D}} D_{ij}(0)\,\hat{\varepsilon}_j(0) & \text{dla} \quad t = 0, \\ \displaystyle\sum_{j\in\mathcal{D}} D_{ij}(0)\,\hat{\varepsilon}_j(t) + \sum_{\tau=0}^{t-1} \sum_{j\in\mathcal{D}} D_{ij}(t-\tau)\,\hat{\varepsilon}_j(\tau) & \text{dla} \quad t > 0. \end{cases} \tag{6.45}$$

Wyrażenia (6.44) stanowią system układów równań liniowych ze względu na chwilowe wartości dystorsji i można je zapisać w postaci

$$\sum_{j\in\mathcal{D}} A^0_{ij}\,\hat{\varepsilon}_j(t) = b_i(t), \tag{6.46}$$

gdzie macierz główna jest stała, tzn. ma identyczne składowe dla wszystkich układów[40)]:

$$A^0_{ij} = \delta_{ij} - (1-\mu_i)\,D_{ij}(0), \tag{6.47}$$

natomiast składowe wektora prawej strony zależą od parametru t w następujący sposób:

$$b_i(t) = \begin{cases} (1-\mu_i)\,\overset{\mathrm{L}}{\varepsilon}_i(0) & \text{dla} \quad t = 0, \\ (1-\mu_i)\,\Big[\overset{\mathrm{L}}{\varepsilon}_i(t) + \displaystyle\sum_{\tau=0}^{t-1} \sum_{j\in\mathcal{D}} D_{ij}(t-\tau)\,\hat{\varepsilon}_j(\tau)\Big] & \text{dla} \quad t > 0. \end{cases} \tag{6.48}$$

[40)] Ta cecha jest ogromnie ważna, a uzyskanie jej stanowi istotę wykorzystania przekształcenia (6.45).

Zauważmy również, że w ogólności (a prawie zawsze w praktyce) macierz główna (6.47) nie jest macierzą symetryczną. Podkreślmy również jej podobieństwo do macierzy A_{ij}, opisanej wzorem $(4.12)_1$.

Układy równań (6.46) rozwiązujemy sekwencyjnie, dla kolejnych chwil. Jest to konieczne ze względu na konstrukcję wektorów prawej strony. Otóż, dla kolejnych chwil t składowe wektora prawej strony $b_i(t)$ zależą od wszystkich chwilowych wartości $\hat{\varepsilon}_j(\tau)$ z chwil poprzedzających (czyli dla $\tau < t$). Wartości te muszą więc być uprzednio obliczone. W tym sekwencyjnym podejściu ujawnia się również istota przekształcenia wykorzystującego zależność (6.45).

Rozwiązując układy (6.46) otrzymamy dla kolejnych chwil t wartości $\hat{\varepsilon}_i(t)$ dystorsji wirtualnych, które należy nakładać na odpowiednie elementy konstrukcji pierwotnej, aby – przy zadanym, ustalonym obciążeniu dynamicznym generującym w pierwotnej konstrukcji dynamiczny stan odkształcenia $\overset{\scriptscriptstyle L}{\varepsilon}_i(t)$ – otrzymać takie same funkcje sił wewnętrznych i odkształceń uogólnionych, jak w konstrukcji zmodyfikowanej obciążonej w ten sam sposób.

Liczba układów równań liniowych (6.46) jest równa liczbie punktów czasowych dyskretyzujących przestrzeń czasową analizy dynamicznej. Jest więc to zwykle ilość bardzo duża. Na szczęście jednak, jak już wspomnieliśmy, macierz główna jest identyczna dla wszystkich tych układów. Zatem na wstępie należy tylko *jednorazowo* dokonać dekompozycji tej macierzy na dolno- i górno-trójkątną (tzw. *rozkład LU*), co umożliwia później względnie szybkie obliczanie niewiadomych $\hat{\varepsilon}_i(t)$, zaś istota i koszta numeryczne obliczeń w głównej mierze sprowadzają się do wyznaczania dla kolejnych chwil wektorów prawej strony.

W celu przyspieszenia obliczeń można również próbować stosować przybliżenia odwołujące się do pewnych cech impulsowej macierzy wpływu, ujawniających się już praktycznie przy poprawnym (z punktu widzenia metody Newmarka) doborze przyrostu czasowego Δt. Jak stwierdzono w poprzednim podrozdziale bezwzględne wartości składowych impulsowej macierzy wpływu (zwłaszcza jej przekroju dla $t = 0$) są wtedy wielkościami bardzo małymi w porównaniu z jedynką. Zatem składowe macierzy głównej na diagonali będą bliskie jedności[41)], a poza nią – zeru. W skrajnym przypadku można więc przyjmować, że macierz główna jest macierzą jednostkową,

$$A^0_{ij} \approx \delta_{ij}, \tag{6.49}$$

i wtedy rozwiązanie każdego z układów (6.46) jest natychmiastowe, gdyż jest tożsame z obliczeniem wektora prawej strony:

$$\hat{\varepsilon}_i(t) \approx b_i(t). \tag{6.50}$$

Nie tak konsekwentnym, ale zapewne obarczonym mniejszym błędem jest następujące przybliżenie

$$A^0_{ij} \approx \delta_{ij} - (1 - \mu_i)\, D_{ii}(0), \tag{6.51}$$

[41)] Wynika to z definicji (6.47) oraz obserwacji, że $0 \leqslant \mu_i \ll \infty$ (często – na przykład przy modelowaniu uszkodzeń – przyjmuje się ograniczenia: $\mu_i \in \langle 0\,,\,1\rangle$).

które pomija tylko składowe macierzy wpływu spoza diagonali. Uproszczenie to również prowadzi do rozwiązania nie wymagającego żadnych kosztownych kalkulacji potrzebnych zwykle przy rozwiązywaniu układów równań liniowych:

$$\hat{\varepsilon}_i(t) \approx \frac{b_i(t)}{1-(1-\mu_i)\,D_{ii}(0)}. \tag{6.52}$$

Należy jednak pamiętać, że stosując tego typu przybliżenia tracimy "analityczną" dokładność, która może się okazać bardzo istotna zwłaszcza, gdy podejście to stosujemy dla przedstawionej w następnym rozdziale analizy wrażliwości. We wszystkich przykładach i obliczeniach prezentowanych w niniejszej pracy przybliżenia te nie były wykorzystywane – stosowano algorytmy oparte na dokładnych formułach.

6.8. Podstawowy algorytm MIDW

W tablicy Algorytm 6.1 (patrz strona następna) przedstawiono kolejne działania służące obliczeniu funkcji dystorsji wirtualnych modelujących modyfikacje sztywnościowe konstrukcji znajdującej się pod określonym obciążeniem dynamicznym. Jest to podstawowy algorytm MIDW, analogiczny do algorytmu 4.1. Podobnie jak w przypadku ustroju statycznego, również i tutaj wpływ wyznaczonych dystorsji modelujących modyfikacje można uwzględniać stosując uogólnioną impulsową macierz wpływu (zgodnie z 7-mym punktem algorytmu), bądź odwołując się bezpośrednio do numerycznego modelu konstrukcji. W tym drugim przypadku funkcje dystorsji generują dodatkowe obciążenia dynamiczne, które należy dodać do pierwotnego obciążenia, a następnie wykonać bezpośrednie całkowanie równań ruchu metodą Newmarka. Otrzymane wyniki będą identyczne z wynikami uzyskanymi z całkowania równań ustroju zmodyfikowanego, ale pod pierwotnym obciążeniem.

6.9. Test modelowania dystorsjami w dynamice

Rozpatrzmy ponownie konstrukcję z przykładu 4.4, przyjmując przy tym, że jest ona obciążona dynamiczne siłą $P = P(t)$, przyłożoną jak na rys. 4.1 (rezygnujemy z obciążenia momentem zginającym). Przyjmowaliśmy różne zależności obciążenia od czasu m.in. w następującej postaci:

$$P(t) = 10\,\mathrm{kN}\cdot\sin\!\left(\tfrac{7}{2}\pi\, t/T\right), \qquad t \in \langle 0\,, T\rangle, \quad T = 10\,\mathrm{ms}. \tag{6.53}$$

Postanowiliśmy modelować dystorsjami wpływ obniżenia wartości modułu Younga materiału pręta nr 3 oraz modułu Younga belki nr 4, uznając tym razem, że są to wielkości niezależne. Zatem faktycznie modelować będziemy niezależne sztywności tych elementów – ich obniżenie można traktować jako np. wynikające z lokalnego uszkodzenia. Wektor modyfikacji parametrów strukturalnych ma teraz postać:

$$\boldsymbol{\lambda} = \begin{bmatrix}\lambda_1\\ \lambda_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1-\dfrac{\hat{E}^{(3)}}{E^{(3)}} & 1-\dfrac{\hat{E}^{(4)}}{E^{(4)}}\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}, \tag{6.54}$$

Algorytm 6.1. Modelowanie modyfikacji parametrów konstrukcji obciążonej dynamicznie.

Dane oraz obliczenia inicjujące

1. Dane są:
   - konstrukcja pod ustalonym obciążeniem dynamicznym $\mathbf{Q}(t)$,
   - lokalizacje dystorsyjne: $i, j \in \mathcal{D}$,
   - funkcja (wektorowa) modyfikacji sztywności: $\boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{\lambda}) = \big[\, \mu_i(\boldsymbol{\lambda}) \,\big]$,
   - wektorowa funkcja przejścia: $\mathbf{f}\big(t; \mathbf{q}(t)\big) = \big[\, f_\alpha\big(t; \mathbf{q}(t)\big) \,\big]$.
2. Obliczamy:
   - wektory liniowej odpowiedzi konstrukcji (tj. na obciążenie $\mathbf{Q}(t)$), czyli wektory funkcji przejścia: $\overset{\mathrm{L}}{\varepsilon}_i(t)$, $\overset{\mathrm{L}}{f}_\alpha(t) = f_\alpha\big(t; \mathbf{q}(t)$ dla $\mathbf{Q}(t)\big)$.
   - odkształceniowa impulsowa macierz wpływu: $D_{ij}(t)$,
   - ogólna impulsowa macierz wpływu: $\breve{D}_{\alpha i}(t) = f_\alpha\big(t; \mathbf{q}(t)$ dla $\varepsilon_i = 1\big)$.

Obliczenia powtarzalne

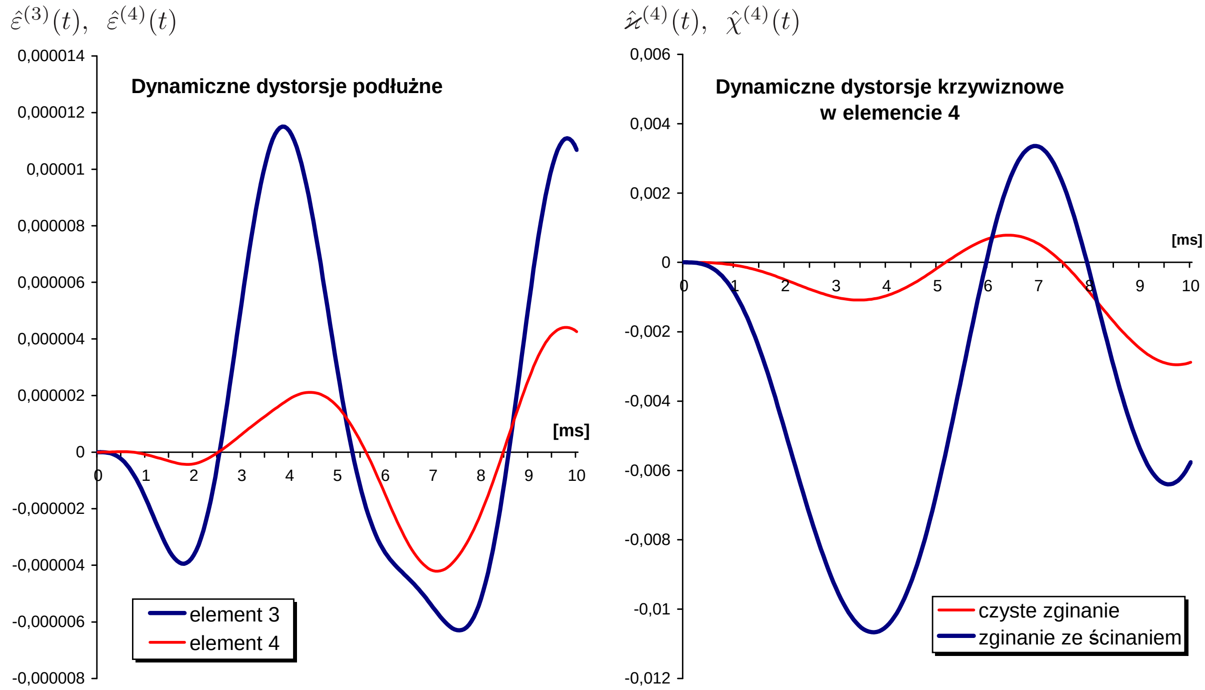
3. Pobierany jest argument w postaci wektora modyfikacji parametrów konstrukcyjnych: $\boldsymbol{\lambda} = \big[\, \lambda_s \,\big]$.
4. Obliczamy modyfikacje sztywnościowe: $\mu_i = \mu_i(\boldsymbol{\lambda})$.
5. Wyznaczamy macierz: $A^0_{ij} = \delta_{ij} - (1 - \mu_i)\, D_{ij}(0)$.
6. Kolejno dla każdej chwili t:
   - obliczamy wektor prawej strony:
     $$b_i(t) = (1 - \mu_i)\left[\overset{\mathrm{L}}{\varepsilon}_i(t) + \sum_{\tau=0}^{t-1} \sum_{j\in\mathcal{D}} D_{ij}(t-\tau)\, \hat{\varepsilon}_j(\tau)\right],$$
   - a następnie rozwiązujemy układ równań: $\displaystyle\sum_{j\in\mathcal{D}} A^0_{ij}\, \hat{\varepsilon}_j(t) = b_i(t)$.

   Otrzymujemy funkcje dystorsji: $\hat{\varepsilon}_i(t)$.
7. Obliczamy uaktualniony wektor funkcji przejścia:
   $$f_\alpha(t) = \overset{\mathrm{L}}{f}_\alpha(t) + \overset{\mathrm{R}}{f}_\alpha(t) = \overset{\mathrm{L}}{f}_\alpha(t) + \sum_{\tau=0}^{t} \sum_{i\in\mathcal{D}} \breve{D}_{\alpha i}(t-\tau)\, \hat{\varepsilon}_i(\tau).$$

natomiast wektor zmiany sztywności ma definicję identyczną jak w przykładzie 4.4 (patrz pierwsza równość w formule (4.34)), ale zupełnie inną zależność od (innego teraz) wektora $\boldsymbol{\lambda}$:

$$\boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{\lambda}) = \big[(1-\lambda_1) \quad (1-\lambda_2) \quad (1-\lambda_2) \quad (1-\lambda_2)\big]^{\mathrm{T}}. \tag{6.55}$$

Przyjmując różne wartości parametrów modyfikacji $\boldsymbol{\lambda}$ testowano algorytm 6.1, obliczając odpowiedzi dynamiczne (wirtualnie) zmodyfikowanego ustroju – wirtualnych modyfikacji dokonywano za pomocą funkcji dystorsji dynamicznych nakładanych na elementy, których sztywność ma ulegać zmianie. Uzyskane rezultaty były praktycznie identyczne z obliczeniami otrzymanymi niezależnie w wyniku faktycznych modyfikacji modelu numerycznego MES.



Rys. 6.5. Funkcje dystorsji dynamicznych.

Między innymi modelowano modyfikację opisaną przez wektor $\boldsymbol{\lambda} = \left[0{,}2\ 0{,}3\right]^{\mathrm{T}}$. Rysunek 6.5 prezentuje funkcje dystorsji dynamicznych obliczone dla tej modyfikacji ustroju pod obciążeniem (6.53). Zauważmy, że funkcja dystorsji podłużnych elementu nr 4, $\hat{\varepsilon}^{(4)}(t)$, ma znacznie mniejsze amplitudy niż dystorsje podłużne $\hat{\varepsilon}^{(3)}(t)$ w pręcie kratowym, i to pomimo tego, że modelowana modyfikacja parametrów strukturalnych w większym stopniu wpływa na obniżenie sztywności podłużnej belki nr 4, niż pręta nr 3:

$$1 - \mu_{EA}^{(4)} = \lambda_2 = 30\% \ > \ 1 - \mu_{EA}^{(3)} = \lambda_1 = 20\%.$$

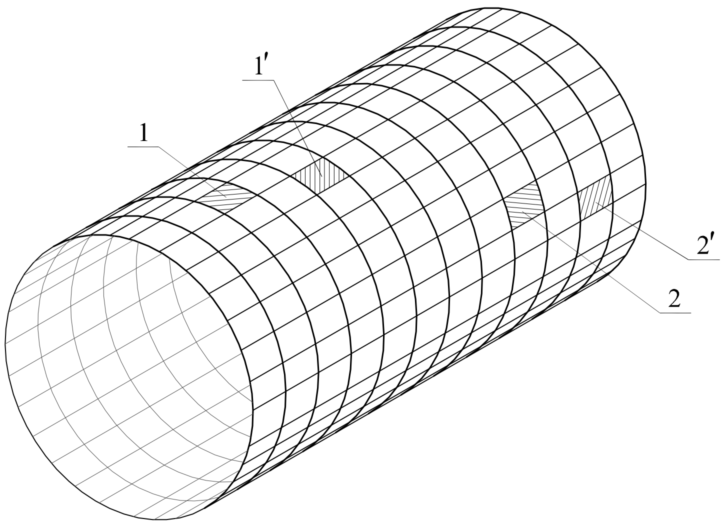
Jest tak oczywiście dlatego, że przy przyjętym sposobie obciążenia siłą $P(t)$ przyłożoną jak na rys. 4.1, odkształcenia podłużne pręta nr 3 są o wiele bardziej istotne niż odkształcenia podłużne elementu nr 4. Podobne spostrzeżenie można wysnuć w odniesieniu do dystorsji krzywiznowych elementu nr 4: przy zadanym sposobie obciążenia konstrukcji składowa odkształceń krzywiznowych związana ze stanem czystego zginania tego elementu będzie istotnie mniejsza od odkształceń wynikających ze zginania momentem i siłą ścinającą (poprzeczną), co uwidacznia się na drugim wykresie z rys. 6.5.

6.10. Ograniczenia stosowania MIDW

Przedstawiona metoda, bazująca na idei dystorsji wirtualnych z powodzeniem wykorzystywanej w wielu zagadnieniach statyki, dotyczy problemów drgań dynamicznych i propagacji fal sprężystych. Jednakże dla wielu zagadnień dynamiki nie może ona być stosowana lub też można ją stosować dopiero po przeprowadzeniu pewnych zabiegów. Poniżej przedstawiamy dosyć istotne ograniczenia metody, wynikające z przyjętych założeń,

bądź też związane z limitami nałożonymi przez koszty obliczeń numerycznych (zarówno związane z czasem obliczeń jak i z wymaganą ilością pamięci komputera). W zasadzie mamy do czynienia z trzema głównymi przyczynami ograniczeń:

1. *Wykorzystanie zasady superpozycji.* MIDW w bardzo efektywny sposób korzysta z liniowej superpozycji odkształceń/przemieszczeń, zatem można ją stosować tylko dla następujących klas zagadnień:
   - Dynamika małych drgań – metoda jest w zasadzie dedykowana dla zagadnień dotyczących układów *liniowych* pod względem związków geometrycznych.
   - Układy nieliniowe rozwiązywane jako fragmentami liniowe. Tego typu podejście wiąże się najczęściej z koniecznością obliczania impulsowej macierzy wpływu na początku każdego kolejnego przedziału czasowego. Wbrew pozorom nie musi to oznaczać istotnego zwiększenia kosztów numerycznych, gdyż na krótkich przedziałach czasu, które odpowiadają kolejnym zagadnieniom liniowym, potrzeba mniej punktów czasowych, a co za tym idzie impulsowa macierz wpływu ma mniejszy rozmiar, a więc również sumowania po czasie są mniej kosztowne, gdyż dotyczą mniejszej ilości składowych.
2. *Problem rozmiaru macierzy wpływu.* Pełna impulsowa macierz wpływu dla konstrukcji o nawet niezbyt rozbudowanym modelu numerycznym ma często bardzo pokaźne rozmiary. Wielkość jej zależy zarówno od ilości elementów (i występujących na nich stanów dystorsyjnych), jak również od liczby kroków czasowych. W skrajnych przypadkach może to prowadzić do problemu braku pamięci dostępnej dla programu komputerowego. Ponadto, szczególnie ten drugi czynnik związany z gęstością dyskretyzacji przestrzeni czasowej, może w bardzo znaczący sposób wpływać na czas obliczeń numerycznych, gdyż zwykle istotną cechą algorytmów opartych na MIDW jest wielokrotne sumowanie po czasie. W związku z tym stosowanie MIDW należy rozważać tylko wtedy, gdy w wystarczającym stopniu spełniony jest przynajmniej jeden z poniższych postulatów:
   - poprawna dyskretyzacja przestrzeni czasowej (tzn. wystarczająca dla dokładnego całkowania metodą Newmarka) wymaga zbyt dużej liczby kroków czasowych;
   - prosta konstrukcja nie wymagająca dużego modelu numerycznego;
   - potrzebny jest tylko pewien (zazwyczaj niewielki) fragment pełnej macierzy wpływu – ten przypadek często występuje (np., gdy modelujemy zmianę parametrów tylko w pewnych fragmentach konstrukcji) i właśnie dla tego typu zagadnień MIDW powinna wykazywać dużą efektywność;
   - konstrukcje o regularnej budowie z możliwością wykorzystania symetrii – dobrym przykładem może być przykład rurociągu, który lokalnie traktować można jako "nieskończenie" długą powłokę walcową (rys. 6.6). Na podstawie rysunku 6.6 łatwo jest spostrzec, że przykładowo wpływ zaburzenia (np. dystorsji) wywołanego w lokalizacji 1 na stan konstrukcji w lokalizacji 2 jest zupełnie identyczny do wpływu analogicznego zaburzenia $1'$ na stan w lokalizacji $2'$.



Rys. 6.6. Fragment długiej powłoki walcowej (np. rurociągu).

Zauważmy, że pierwszy z postulatów ogranicza rozmiar macierzy wpływu związany z trzecim wymiarem odpowiadającym dyskretyzacji czasowej, natomiast pozostałe ze względu na dwa pierwsze wymiary odpowiadające dyskretyzacji przestrzennej. Dla wielu zastosowań istotniejsze może się okazać to pierwsze ograniczenie.

3. *Brak możliwości modelowania zmian masy i tłumienia.* Zaprezentowana metoda nie pozwala, jak na razie, na uwzględnienie wpływu modyfikacji parametrów konstrukcji na zmianę masy oraz tłumienia. Z tego powodu może być ona stosowana tylko w tych problemach dynamiki, w których taka modyfikacja nie występuje lub jest na tyle nieistotna, że może zostać pominięta. Bardzo dobrym przykładem może być zagadnienie modelowania defektów w konstrukcjach prętowych – zwykle są to bowiem rysy i pęknięcia, które w znikomym stopniu wpływają na zmianę masy całego elementu prętowego, natomiast w bardzo istotny sposób obniżają jego cechy konstrukcyjne, zmniejszając efektywne pole przekroju poprzecznego. Również defekty będące wynikiem korozji można uznać za nadające się do modelowania przy pomocy MIDW, jako obniżające lokalnie współczynniki sztywności bez istotnego ubytku masy.

Rozdział 7

Zastosowanie MIDW do analizy wrażliwości w dynamice konstrukcji

7.1. Wprowadzenie

W rozdziale 5 zaprezentowano sposób wykorzystania dystorsji wirtualnych w analizie wrażliwości ustroju statycznego. Teraz przedstawimy analogiczną metodę pozwalającą na ocenę wrażliwości konstrukcji pod obciążeniem dynamicznie zmiennym w czasie. Przypomnijmy, że analiza wrażliwości polega na badaniu w jaki sposób zmieniają się własności ustroju w odpowiedzi na niewielkie zaburzenie (modyfikację) zmiennej projektowej, rozumianej jako zmiana pewnego parametru konstrukcyjnego. W tym kontekście przyjmować jednak będziemy dosyć silne założenie, że dopuszczalna zmiana parametru konstrukcyjnego musi oddziaływać jedynie na cechy sztywnościowe ustroju, a nie może w istotny sposób wpływać na jego masę lub tłumienie. Zatem należy raczej mówić tylko o *wrażliwości sztywnościowej* ustroju. Stanowi to z pewnością bardzo istotne ograniczenie dla zastosowania tej metody do różnych zagadnień – można ją wykorzystywać jedynie w tych przypadkach, w których ewentualne, lokalne modyfikacje masy i tłumienia są nieistotne lub na tyle małe, że mogą zostać pominięte.

W sensie matematycznym analiza wrażliwości polega na znalezieniu pochodnych pewnej funkcji ze względu na wybrane zmienne. W rozdziale tym zdefiniowana zostanie pewna klasa funkcji celu, bazujących na zależności pomiędzy funkcją przejścia, a współczynnikami sztywnościowymi konstrukcji. Podany zostanie algorytm obliczania gradientu takich

funkcji, przy czym zastosowanie MIDW pozwoli na wyprowadzenie i wykorzystanie analitycznych formuł na wrażliwość konstrukcji. Dodatkowo szczegółowo przedstawiona zostanie zoptymalizowana wersja algorytmu, nadająca się bezpośrednio do realizacji numerycznej. Poprawność wyprowadzonych związków zostanie zweryfikowana na przykładzie potwierdzającym poprawność proponowanej metody obliczania gradientów przez porównanie z wynikami uzyskanymi przy zastosowaniu Metody Różnic Skończonych (MRS).

7.2. Funkcja celu i jej gradient

Przyjmijmy, że analizowany problem można rozpatrywać jako zagadnienie optymalizacji pewnej **funkcji celu**. Zakładamy, że funkcję tę da się przedstawić w postaci

$$f_{\mathrm{cel}}(\boldsymbol{\lambda}) = \tilde{f}_{\mathrm{cel}}\big(\mathbf{F}(\boldsymbol{\lambda})\big), \qquad \boldsymbol{\lambda} \in \mathcal{L}, \tag{7.1}$$

przy czym

$$\mathbf{F}(\boldsymbol{\lambda}) = \big[F_t(\boldsymbol{\lambda})\big], \qquad t \in \mathcal{T}, \tag{7.2}$$

gdzie $\boldsymbol{\lambda} = [\lambda_s]$ jest **wektorem parametrów funkcji celu** tożsamym właściwie z wektorem modyfikacji strukturalnych, natomiast $F_t(\boldsymbol{\lambda})$ są pewnymi funkcjami zależnymi od stanu konstrukcji w określonych chwilach $t \in \mathcal{T}$. W praktyce zbiór chwil $\mathcal{T}$ będzie zazwyczaj wynikiem dyskretyzacji zwartego przedziału czasowego. Zbiór $\mathcal{L}$ określany jest przez ograniczenia nałożone na parametry funkcji celu, które są zwykle istotne dla zagadnienia optymalizacji. Funkcje F_t grupujemy w **wektor chwilowych stanów konstrukcji**[42] $\mathbf{F}$. Wymagamy, aby funkcja celu (7.1) była różniczkowalna względem składowych tego wektora, czyli, że znając $\mathbf{F}$ możemy dokładnie wyznaczyć składowe następującego gradientu:

$$\frac{d\tilde{f}_{\mathrm{cel}}}{d\mathbf{F}}(\mathbf{F}) = \left[\frac{\partial \tilde{f}_{\mathrm{cel}}}{\partial F_t}(\mathbf{F})\right]. \tag{7.3}$$

Często funkcja celu bazuje na skumulowanej odpowiedzi konstrukcji uzyskanej z pewnego przedziału czasowego. Zapis (7.1) przyjmuje wtedy postać sumy składowych wektora chwilowych stanów konstrukcji

$$f_{\mathrm{cel}}(\boldsymbol{\lambda}) = \tilde{f}_{\mathrm{cel}}\big(\mathbf{F}(\boldsymbol{\lambda})\big) = \sum_{t\in\mathcal{T}} F_t(\boldsymbol{\lambda}), \tag{7.4}$$

zaś gradient (7.3) jest wektorem o wszystkich składowych jednostkowych.

Istotę funkcji celu stanowić jednak będą funkcje $F_t(\boldsymbol{\lambda})$, czyli składowe wektora $\mathbf{F}$. Postulujemy, że da się go przedstawić w następującej postaci

$$\mathbf{F}(\boldsymbol{\lambda}) = \tilde{\mathbf{F}}\big(\mathbf{f}(t;\boldsymbol{\lambda})\big) = \big[\tilde{F}_t\big(\mathbf{f}(\tau;\boldsymbol{\lambda})\big)\big], \tag{7.5}$$

[42] Jest to raczej wektor pewnych miar zależnych od chwilowych stanów konstrukcji. Rozmiar wektora $\mathbf{F}$ zależy tylko od liczby analizowanych chwil czasowych (które w ogólności nie muszą być ani uporządkowane, ani nie muszą stanowić regularnej dyskretyzacji zwartego przedziału czasowego – choć zwykle tak właśnie będzie), dlatego też wyjątkowo zastosujemy klasyczną notację $F_t(\boldsymbol{\lambda})$, zamiast zapisu $F(t;\boldsymbol{\lambda})$ zgodnego z przyjętą umową (patrz przypis 25, str. 91).

przy czym

$$\mathbf{f}(t;\boldsymbol{\lambda}) = \left[f_\alpha(t;\boldsymbol{\lambda})\right] \tag{7.6}$$

jest **wektorem funkcji przejścia**, które definiujemy bardzo ogólnie – jako kombinacje liniowe zależnych od czasu funkcji przemieszczeń ustroju dynamicznego. Funkcja celu oparta jest więc na funkcjach przejścia, opisujących propagację fali sprężystej. Zależność (7.5) musi być różniczkowalna względem składowych wektora funkcji przejścia, co oznacza, że można wyznaczyć reprezentację macierzową gradientu

$$\frac{d\tilde{\mathbf{F}}}{d\mathbf{f}}(\mathbf{f}) = \left[\frac{\partial \tilde{F}_t}{\partial f_\alpha}(\mathbf{f})\right]. \tag{7.7}$$

Powyższe założenia dotyczyły postaci funkcji przejścia. Na koniec przyjmujemy jeszcze ważny postulat dotyczący jej parametrów – otóż parametry funkcji celu muszą być w jednoznaczny sposób powiązane z **wektorem zmiany sztywności konstrukcji**, tzn.:

$$\boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{\lambda}) = \left[\mu_i(\boldsymbol{\lambda})\right], \tag{7.8}$$

przy czym zależność ta musi być różniczkowalna, co oznacza, że dla każdego $\boldsymbol{\lambda} \in \mathcal{L}$ możemy obliczyć gradient

$$\frac{d\boldsymbol{\mu}}{d\boldsymbol{\lambda}}(\boldsymbol{\lambda}) = \left[\frac{\partial \mu_i}{\partial \lambda_s}(\boldsymbol{\lambda})\right]. \tag{7.9}$$

Przypomnijmy ponadto, że ograniczenia nałożone na składowe wektora modyfikacji, λ_s, muszą zapewniać nieujemność składowych wektora $\boldsymbol{\mu}$. Przyjęte założenie oznacza, iż funkcja przejścia pośrednio zależy od wektora modyfikacji sztywności

$$\mathbf{f}(t;\boldsymbol{\lambda}) = \tilde{\mathbf{f}}\big(t;\boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{\lambda})\big). \tag{7.10}$$

Wielkości, które mogą stanowić parametry funkcji celu to oczywiście modyfikacje stałych materiałowych lub wymiarów elementów, które jednoznacznie wpływają na ich sztywność, czy też wreszcie modyfikacje samych współczynników sztywności. Zauważmy również, że na przykład moduł Younga ma wpływ zarówno na sztywność osiową, jak i zgięciową elementu ramy płaskiej – zatem jeden parametr funkcji celu, opisujący zmianę modułu Younga, steruje dwoma parametrami sztywności. Bardzo łatwo również można wyobrazić sobie przypadek, w którym jeden parametr wpływa na pokaźną liczbę współczynników sztywności różnych elementów umiejscowionych dowolnie w konstrukcji (a więc wpływa w różny sposób na wiele składowych globalnej macierzy sztywności). Dobrym przykładem jest tutaj zagadnienie optymalizacji konstrukcji pod obciążeniem dynamicznym – parametrem optymalizacji może być przykładowo modyfikacja pola przekroju pewnej wybranej grupy elementów konstrukcji, które ze względów produkcyjnych i montażowych powinny mieć identyczny przekrój. Przykłady określania zależności (7.8) oraz gradientu (7.9) dla różnych parametrów dotyczących prętów kratowych i elementów ramy płaskiej przedstawiono w rozdziale 4.3.

Przedstawione formalnie założenia mogą się wydawać skomplikowane. Zwróćmy jednak uwagę, że ich istotę stanowią tak naprawdę dwa postulaty:

1. funkcja celu skonstruowana jest przy wykorzystaniu funkcji przejścia, określających propagację fali sprężystej w konstrukcji,
2. parametry funkcji celu muszą wpływać na modyfikacje sztywności konstrukcji, a więc są właściwie parametrami modyfikacji strukturalnych.

Dla każdego przypadku spełniającego podane założenia **gradient funkcji celu** obliczymy według wzoru:

$$\frac{\partial f_{\text{cel}}(\boldsymbol{\lambda})}{\partial \lambda_s} = \sum_{\alpha} \sum_{t \in \mathcal{T}} \frac{\partial f_{\text{cel}}(\mathbf{F})}{\partial F_t} \frac{\partial \tilde{F}_t(\mathbf{f})}{\partial f_\alpha} \frac{\partial f_\alpha(t; \boldsymbol{\lambda})}{\partial \lambda_s}, \tag{7.11}$$

gdzie występują znane składowe gradientów (7.3) i (7.7), oraz stanowiące istotę obliczeń, nieznane **składowe gradientu funkcji przejścia** $\frac{\partial f_\alpha}{\partial \lambda_s}$. Jeśli funkcja celu jest postaci (7.4) to składowe gradientu (7.3) są jedynkami i wzór (7.11) upraszcza się do następującej formuły:

$$\frac{\partial f_{\text{cel}}(\boldsymbol{\lambda})}{\partial \lambda_s} = \sum_{\alpha} \sum_{t \in \mathcal{T}} \frac{\partial \tilde{F}_t(\mathbf{f})}{\partial f_\alpha} \frac{\partial f_\alpha(t; \boldsymbol{\lambda})}{\partial \lambda_s}. \tag{7.12}$$

7.3. Gradient funkcji przejścia

Pokazano, że dla każdej funkcji celu spełniającej podane w poprzednim podrozdziale postulaty obliczenie gradientu sprowadza się w głównej mierze do wyznaczenia **gradientu funkcji przejścia**:

$$\frac{d\mathbf{f}}{d\boldsymbol{\lambda}}(t; \boldsymbol{\lambda}) = \left[\frac{\partial f_\alpha}{\partial \lambda_s}(t; \boldsymbol{\lambda}) \right]. \tag{7.13}$$

Przypomnijmy, że odkształceniową funkcję przejścia może rozpatrywać jako sumę czynnika liniowego i rezydualnego

$$f_\alpha(t; \boldsymbol{\lambda}) = \overset{\text{L}}{f}_\alpha(t) + \overset{\text{R}}{f}_\alpha(t; \boldsymbol{\lambda}), \tag{7.14}$$

przy czym – jak to ukazano w powyższym wyrażeniu – część liniowa (niejako z definicji) nie może zależeć od parametrów funkcji celu λ_s. Jest tak, gdyż przyjęliśmy założenie, że parametry λ_s muszą być powiązane z wielkościami μ_i opisującymi zmianę sztywności konstrukcji. Zatem składowe gradientu funkcji przejścia zależą tak naprawdę tylko od części rezydualnej

$$\frac{\partial f_\alpha(t; \boldsymbol{\lambda})}{\partial \lambda_s} = \frac{\partial \overset{\text{R}}{f}_\alpha(t; \boldsymbol{\lambda})}{\partial \lambda_s}, \tag{7.15}$$

która z kolei zależna jest od dystorsji $\hat{\varepsilon}_i(t; \boldsymbol{\lambda})$, modelujących modyfikacje sztywnościowe konstrukcji wynikłe ze zmian wartości parametrów λ_s. Zależność ta wykorzystuje impulsową macierz wpływu i ma postać $(6.28)_2$. Różniczkując to wyrażenie dostajemy następującą formułę:

$$\frac{\partial \overset{\text{R}}{f}_\alpha}{\partial \lambda_s}(t; \boldsymbol{\lambda}) = \sum_{\tau=0}^{t} \sum_{i \in \mathcal{D}} \breve{D}_{\alpha i}(t-\tau) \frac{\partial \hat{\varepsilon}_i}{\partial \lambda_s}(\tau; \boldsymbol{\lambda}). \tag{7.16}$$

W powyższym wzorze pojawiają się wielkości $\frac{\partial \hat{\varepsilon}_i}{\partial \lambda_s}$, które można określić mianem **składowych gradientu dystorsji**:

$$\frac{d\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}}{d\boldsymbol{\lambda}}(t;\boldsymbol{\lambda}) = \left[\frac{\partial \hat{\varepsilon}_i}{\partial \lambda_s}(t;\boldsymbol{\lambda})\right]. \tag{7.17}$$

Wyznaczenie tych składowych stanowić będzie istotę proponowanej metody obliczania gradientu funkcji przejścia.

7.4. Gradient dystorsji

Zanim podamy wzór na obliczanie składowych gradientu dystorsji zreasumujmy, iż przedstawiane do tej pory postępowanie opiera się na następujących konstatacjach:

- Istnieje jednoznaczny związek pomiędzy lokalną zmianą sztywności konstrukcji, a dystorsją (zarówno w przypadku układów statycznych jak i poddanych wymuszeniom dynamicznym):

$$\hat{\varepsilon}_i(\boldsymbol{\lambda}) = \big(1 - \mu_i(\boldsymbol{\lambda})\big)\, \varepsilon_i(\boldsymbol{\lambda}),$$
$$\hat{\varepsilon}_i(t,\boldsymbol{\lambda}) = \big(1 - \mu_i(\boldsymbol{\lambda})\big)\, \varepsilon_i(t;\boldsymbol{\lambda}).$$

- Zatem wpływ parametrów modyfikujących sztywność konstrukcji można modelować dystorsjami nie ingerując przy tym w pierwotny model ustroju.
- Obliczenie gradientu funkcji przejścia w układzie dynamicznym wymaga obliczenia gradientu dystorsji modelujących lokalną zmianę sztywności tego układu.
- Dystorsje są adekwatne modyfikacjom parametrów funkcji celu (skonstruowanej na bazie funkcji przejścia), zatem gradient dystorsji stanowi podstawę do obliczenia gradientu funkcji celu.

W celu wyznaczenia analitycznych wyrażeń na składowe gradientu dystorsji różniczkujemy (względem parametrów λ_s) związki (6.44), otrzymując następujące układy równań liniowych ze względu na składowe gradientu dystorsji:

$$\sum_{j\in\mathcal{D}} \Big[\delta_{ij} - \big(1-\mu_i(\boldsymbol{\lambda})\big)\, D_{ij}(0)\Big] \frac{\partial \hat{\varepsilon}_j(t;\boldsymbol{\lambda})}{\partial \lambda_s} =$$
$$- \frac{\partial \mu_i(\boldsymbol{\lambda})}{\partial \lambda_s}\, \varepsilon_i(t;\boldsymbol{\lambda}) + \big(1-\mu_i(\boldsymbol{\lambda})\big) \sum_{\tau=0}^{t-1} \sum_{j\in\mathcal{D}} D_{ij}(t-\tau)\, \frac{\partial \hat{\varepsilon}_j(\tau;\boldsymbol{\lambda})}{\partial \lambda_s}. \tag{7.18}$$

Wszystkie powyższe układy mają taką samą macierz główną (A^0_{ij} według (6.47)), co jest niezwykle pożądaną własnością. Dla uzyskania rozwiązania wystarczy tylko pojedyncza dekompozycja macierzy układu (rozkład LU), a koszta obliczeń numerycznych związane są właściwie tylko z wyznaczaniem wektorów prawej strony. Układy te należy bowiem rozwiązywać sekwencyjnie dla kolejnych chwil t. Otrzymane dla każdej, kolejnej chwili składowe gradientu dystorsji potrzebne są do obliczenia wektorów prawej strony dla wszystkich chwil następnych.

Wyrażenia (7.18) stanowią system układów równań liniowych ze względu na chwilowe wartości dystorsji – dla każdej chwili t mamy S układów równań ($S = \dim(\boldsymbol{\lambda})$) na składowe gradientu dystorsji (w chwili t). Można je zapisać w postaci:

$$\sum_{j\in\mathcal{D}} A^0_{ij}\, \frac{\partial\hat{\varepsilon}_j}{\partial\lambda_s}(t) = B_{is}(t), \tag{7.19}$$

gdzie macierz główna jest stała, tzn. ma identyczne składowe (6.47) dla wszystkich układów (tj. we wszystkich chwilach t), natomiast składowe wektora prawej strony zależą od parametru t w następujący sposób:

$$B_{is}(t) = \begin{cases} -\dfrac{\partial\mu_i(\boldsymbol{\lambda})}{\partial\lambda_s}\,\varepsilon_i(0) & \text{dla} \quad t = 0, \\ -\dfrac{\partial\mu_i(\boldsymbol{\lambda})}{\partial\lambda_s}\,\varepsilon_i(t) + \big(1-\mu_i(\boldsymbol{\lambda})\big) \displaystyle\sum_{\tau=0}^{t-1}\sum_{j\in\mathcal{D}} D_{ij}(t-\tau)\, \frac{\partial\hat{\varepsilon}_j(\tau)}{\partial\lambda_s} & \text{dla} \quad t > 0. \end{cases} \tag{7.20}$$

Układy równań (7.19) rozwiązujemy sekwencyjnie, dla kolejnych chwil czasowych t. Jest to konieczne ze względu na konstrukcję wektorów prawej strony. Otóż, dla kolejnych chwil t składowe wektora prawej strony $B_{is}(t)$ zależą od wszystkich chwilowych wartości $\frac{\partial\hat{\varepsilon}_j}{\partial\lambda_s}(\tau)$ z chwil poprzedzających (czyli dla $\tau < t$). Wartości te muszą więc być uprzednio obliczone. Składowe $B_{is}(t)$ zależą ponadto od funkcji całkowitych odkształceń w lokalizacjach dystorsyjnych $\varepsilon_i(t)$ ($i \in \mathcal{D}$), które obliczymy według wzoru (6.31) – wymaga to jednak znajomości dystorsji dynamicznych, $\hat{\varepsilon}_i(t)$, modelujących zmianę sztywności konstrukcji spowodowaną wprowadzeniem modyfikacji, $\boldsymbol{\lambda}$, pewnych parametrów konstrukcyjnych. Zatem wpierw musimy wyznaczyć te dystorsje. W tym celu rozwiązujemy układ równań (6.46), opisany przez tę samą macierz główną co układy (7.19). Zatem dla wszystkich obliczeń tylko raz potrzebujemy wykonać rozkład macierzy na dolno- i górnotrójkątną (rozkład LU), a pozostałe obliczenia sprowadzają się głównie do sumowań wyrazów prawej strony.

Zaprezentowana metodologia pozwala sformułować następujące wnioski:

- Zastosowanie **Metody Impulsowych Dystorsji Wirtualnych** pozwala na wyprowadzenie **analitycznych** wzorów na składowe gradientu funkcji przejścia.
- Dysponujemy zatem analitycznymi formułami na gradient funkcji celu opartej na analizie funkcji przejścia (i spełniającej pewne, podane na początku tego rozdziału założenia).
- Istotną cechą metody jest to, że optymalnie oblicza się wszystkie składowe gradientu naraz.

7.5. Algorytm obliczania gradientu funkcji przejścia

Przeprowadzone rachunki pozwoliły skonstruować algorytm obliczania gradientu funkcji przejścia, bazujący na formułach analitycznych. Podajemy dwie wersje tego algorytmu:

1. ogólny schemat ukazujący istotę dokonywanych obliczeń,

2. szczegółowa, zoptymalizowana wersja nadająca się bezpośrednio do efektywnej implementacji numerycznej.

7.5.1. Ogólny schemat algorytmu

Algorytm 7.1 prezentuje zastosowanie idei dystorsji wirtualnych dla analizy wrażliwości ustroju pod obciążeniem zmiennym w czasie. Jak już wspomniano, dotyczy on tylko wrażliwości sztywnościowej i w części jest powtórzeniem algorytmu 6.1, gdyż dla wyznaczenia stanowiącego główny cel obliczeń gradientu dystorsji potrzebujemy również obliczyć odpowiednie funkcje dystorsji dynamicznych. Gradient dystorsji wykorzystywany jest przez algorytm do wyznaczenia gradientu funkcji przejścia, który z kolei można wykorzystać (już w poza algorytmem) do wyznaczenia gradientu funkcji celu, opartej na tych funkcjach przejścia i spełniającej założenia podane na początku tego rozdziału.

Algorytm jest nieco bardziej skomplikowany, niż przedstawione dotychczas. Rozpatrzmy jednak pewien szczególny przypadek, gdy dla zadanego wektora z przestrzeni modyfikacji strukturalnych, $\boldsymbol{\lambda}$, nie następuje zmiana współczynników sztywności, tzn.: $\mu_i(\boldsymbol{\lambda}) = 1$. W przypadku dobrze zdefiniowanych parametrów konstrukcyjnych, λ_s, sytuacja ta powinna występować tylko wtedy, gdy wszystkie składowe wektora modyfikacji są jednostkowe, czyli: $\boldsymbol{\lambda} = \mathbf{1}$. Jest to przypadek, gdy chcemy obliczyć wrażliwość modyfikacji konstrukcji pierwotnej. Algorytm 7.1 bardzo się wtedy upraszcza – w analogiczny sposób jak pokazano w przypadku algorytmu 5.1 dla wrażliwości ustroju statycznego. Zauważmy bowiem, że macierz główna jest jednostkowa, $A^0_{ij} = \delta_{ij}$, funkcje dystorsji są zerowe, $\hat{\varepsilon}_i(t) \equiv 0$, zaś funkcje odkształceń całkowitych są równe liniowym, $\varepsilon_i(t) \equiv \overset{\text{L}}{\varepsilon}_i(t)$. Zatem nie musimy nawet znać odkształceniowej macierzy wpływu, $D_{ij}(t)$, gdyż składowe gradientu dystorsji

Algorytm 7.1. Analiza wrażliwości konstrukcji obciążonej dynamicznie.

Dane oraz obliczenia inicjujące

1. Dane są:
   - konstrukcja pod ustalonym obciążeniem dynamicznym $\mathbf{Q}(t)$,
   - lokalizacje dystorsyjne: $i, j \in \mathcal{D}$,
   - funkcja (wektorowa) modyfikacji sztywności: $\boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{\lambda}) = \left[\, \mu_i(\boldsymbol{\lambda}) \,\right]$, oraz funkcja jej gradientu $\frac{d\boldsymbol{\mu}}{d\boldsymbol{\lambda}}(\boldsymbol{\lambda}) = \left[\, \frac{d\mu_i}{d\lambda_s}(\boldsymbol{\lambda}) \,\right]$
   - wektorowa funkcja przejścia: $\mathbf{f}\big(t; \mathbf{q}(t)\big) = \left[\, f_\alpha\big(t; \mathbf{q}(t)\big) \,\right]$.
2. Obliczamy:
   - wektory liniowej odpowiedzi konstrukcji (tj. na obciążenie $\mathbf{Q}(t)$), czyli wektory funkcji przejścia: $\overset{\text{L}}{\varepsilon}_i(t)$, $\overset{\text{L}}{f}_\alpha(t) = f_\alpha\big(t; \mathbf{q}(t) \text{ dla } \mathbf{Q}(t)\big)$.
   - odkształceniowa impulsowa macierz wpływu: $D_{ij}(t)$,
   - ogólna impulsowa macierz wpływu: $\breve{D}_{\alpha i}(t) = f_\alpha\big(t; \mathbf{q}(t) \text{ dla } \varepsilon_i = 1\big)$.

[ciąg dalszy na następnej stronie]
↓

Algorytm 7.1. [ciąg dalszy]

↓
[kontynuacja poprzedniej strony]

Obliczenia powtarzalne

3. Pobierany jest argument w postaci wektora modyfikacji parametrów konstrukcyjnych $\boldsymbol{\lambda} = \left[\, \lambda_s \,\right]$.
4. Obliczamy modyfikacje sztywnościowe: $\mu_i = \mu_i(\boldsymbol{\lambda})$.
5. Wyznaczamy i dekomponujemy (rozkład LU) macierz: $A^0_{ij} = \delta_{ij} - (1 - \mu_i)\, D_{ij}(0)$.
6. Kolejno dla każdej chwili t:
   - obliczamy wektor prawej strony:
     $$b_i(t) = (1 - \mu_i)\left[\overset{\mathrm{L}}{\varepsilon}_i(t) + \sum_{\tau=0}^{t-1} \sum_{j \in \mathcal{D}} D_{ij}(t - \tau)\, \hat{\varepsilon}_j(\tau)\right],$$
   - a następnie rozwiązujemy układ równań: $\sum\limits_{j \in \mathcal{D}} A^0_{ij}\, \hat{\varepsilon}_j(t) = b_i(t)$.

   Otrzymujemy funkcje dystorsji: $\hat{\varepsilon}_i(t)$.
7. Obliczamy funkcje odkształceń całkowitych:
   $$\varepsilon_i(t) = \overset{\mathrm{L}}{\varepsilon}_i(t) + \overset{\mathrm{R}}{\varepsilon}_i(t) = \overset{\mathrm{L}}{\varepsilon}_i(t) + \sum_{\tau=0}^{t} \sum_{j \in \mathcal{D}} D_{ij}(t - \tau)\, \hat{\varepsilon}_j(\tau).$$
8. Kolejno dla każdej chwili t przeprowadzamy następujące działania dla każdego s:
   - obliczamy wektor prawej strony:
     $$B_{is}(t) = -\frac{\partial \mu_i}{\partial \lambda_s}\, \varepsilon_i(t) + (1 - \mu_i) \sum_{\tau=0}^{t-1} \sum_{j \in \mathcal{D}} D_{ij}(t - \tau)\, \frac{\partial \hat{\varepsilon}_j(\tau)}{\partial \lambda_s}, \text{ gdzie: } \frac{\partial \mu_i}{\partial \lambda_s} = \frac{\partial \mu_i}{\partial \lambda_s}(\boldsymbol{\lambda}).$$
   - a następnie rozwiązujemy układ równań: $\sum\limits_{j \in \mathcal{D}} A^0_{ij}\, \dfrac{\partial \hat{\varepsilon}_j(t)}{\partial \lambda_s} = B_{is}(t)$.

   Otrzymujemy gradient dystorsji: $\dfrac{\partial \hat{\varepsilon}_i}{\partial \lambda_s}(t)$.
9. Obliczamy wyniki:
   - gradient funkcji przejścia:
     $$\frac{\partial f_\alpha}{\partial \lambda_s}(t) = \frac{\partial \overset{\mathrm{R}}{f}_\alpha}{\partial \lambda_s}(t) = \sum_{\tau=0}^{t} \sum_{i \in \mathcal{D}} \check{D}_{\alpha i}(t - \tau)\, \frac{\partial \hat{\varepsilon}_i}{\partial \lambda_s}(\tau),$$
   - wartość funkcji przejścia (można ją obliczyć już po 6-tym punkcie algorytmu):
     $$f_\alpha(t) = \overset{\mathrm{L}}{f}_\alpha(t) + \overset{\mathrm{R}}{f}_\alpha(t) = \overset{\mathrm{L}}{f}_\alpha(t) + \sum_{\tau=0}^{t} \sum_{i \in \mathcal{D}} \check{D}_{\alpha i}(t - \tau)\, \hat{\varepsilon}_i(\tau).$$

wyznaczamy bezpośrednio ze wzoru:

$$\frac{\partial \hat{\varepsilon}_i(t;\mathbf{1})}{\partial \lambda_s} = -\frac{\partial \mu_i(\mathbf{1})}{\partial \lambda_s}\, \overset{\text{L}}{\varepsilon}_i(t), \tag{7.21}$$

co oznacza, że składowe gradientu funkcji przejścia są równe:

$$\frac{\partial f_\alpha(t;\mathbf{1})}{\partial \lambda_s} = -\sum_{\tau=0}^{t}\sum_{i\in\mathcal{D}} \breve{D}_{\alpha i}(t-\tau)\, \frac{\partial \mu_i(\mathbf{1})}{\partial \lambda_s}\, \overset{\text{L}}{\varepsilon}_i(t). \tag{7.22}$$

Powyższe spostrzeżenie uogólnimy w następnym paragrafie dla ogromnie istotnego przypadku, gdy niekoniecznie wszystkie ze składowych wektora zmiany współczynników sztwyności, $\boldsymbol{\mu}$, są jednostkowe. Otrzymamy dzięki temu zoptymalizowaną wersję algorytmu, pozwalającą na często bardzo znaczące zmniejszenie kosztów numerycznych obliczeń – tym większe im więcej składowych μ_i jest równe jeden.

7.5.2. Zoptymalizowany algorytm obliczania gradientu

Zanim przedstawimy zoptymalizowaną wersję algorytmu 7.1 zauważmy, że kosztowne obliczeniowo są przede wszystkim sumowania po chwilach czasowych. Oczywistym usprawnieniem jest więc – przy obliczaniu funkcji odkształceń w punkcie 7-mym algorytmu – wykorzystanie faktu, że czynnik zawierający dużo sumowań (oznaczony w równaniu poniżej) został już obliczony w punkcie 6-tym – zatem:

$$\overset{\text{R}}{\varepsilon}_i(t) = \sum_{\tau=0}^{t}\sum_{j\in\mathcal{D}} D_{ij}(t-\tau)\,\hat{\varepsilon}_j(\tau) = \underbrace{\sum_{\tau=0}^{t-1}\sum_{j\in\mathcal{D}} D_{ij}(t-\tau)\,\hat{\varepsilon}_j(\tau)}_{\text{obliczone wcześniej}} + \sum_{j\in\mathcal{D}} D_{ij}(0)\,\hat{\varepsilon}_j(\tau). \tag{7.23}$$

Naprawdę istotna optymalizacja polega jednak na wykorzystaniu spostrzeżenia, że składowe gradientu związane z loaklizacjami dystorsyjnymi, w których współczynnik sztywności ma wartość pierwotną, można bardzo szybko obliczyć i dzięki temu zmniejszyć liczbę niewiadomych w układach równań – do obliczenia będą już bowiem tylko pozostałe składowe. W tym celu zdefiniujmy dwie grupy indeksów:

- lokalizacje dystorsyje, w których (dla zadanego wektora modyfikacji $\boldsymbol{\lambda}$) nie występuje zmiana współczynnika sztywności:

$$\mathcal{D}_{\mathcal{Z}} = \{i \in \mathcal{D}:\ \mu_i = 1\}, \tag{7.24}$$

- lokalizacje, w których zadane modyfikacje strukturalne $\boldsymbol{\lambda}$ taką zmianę powodują:

$$\mathcal{D}_{\mathcal{N}} = \{i \in \mathcal{D}:\ \mu_i \neq 1\}. \tag{7.25}$$

Widać, że zdefiniowane zbiory indeksów są rozłącznymi i wyczerpującymi podzbiorami zbioru wszystkich lokalizacji dystorsyjnych, tzn.:

$$\mathcal{D}_{\mathcal{Z}} \cap \mathcal{D}_{\mathcal{N}} = \emptyset \quad \text{oraz} \quad \mathcal{D}_{\mathcal{Z}} \cup \mathcal{D}_{\mathcal{N}} = \mathcal{D}. \tag{7.26}$$

Przyjmujemy dalej następujące symbole indeksów do oznaczania wielkości związanych z odpowiednimi lokalizacjami dystorsyjnymi:

$$z \in \mathcal{D}_{\mathcal{Z}}, \quad p, q \in \mathcal{D}_{\mathcal{N}}, \quad \text{oraz oczywiście:} \quad i, j \in \mathcal{D}. \tag{7.27}$$

Pamiętamy przy tym, że $\mathcal{D}_{\mathcal{Z}} \subset \mathcal{D}$ i $\mathcal{D}_{\mathcal{N}} \subset \mathcal{D}$, a więc indeksy i, j "przbiegają" zawsze również lokalizacje indeksowane przez z oraz p i q.

Wykorzystując teraz przyjęte założenie: $\mu_z(\boldsymbol{\lambda}) = 1$, zauważmy, że wiersze macierzy głównej A^0_{ij} odpowiadające z-owym indeksom są zerowe z wyjątkiem składowej A^0_{zz}, która jest równa jeden, czyli

$$A^0_{zj} = \delta_{zj}. \tag{7.28}$$

Natomiast odpowiadające im składowe wektorów prawej strony, dla każdego t, są równe (odpowiednio) – dla układu równań (6.46):

$$b_z(t) = 0, \tag{7.29}$$

zaś dla układów (7.19):

$$B_{zs}(t) = -\frac{\partial \mu_z}{\partial \lambda_s}\, \varepsilon_z(t). \tag{7.30}$$

W algorytmie musimy znać funkcje odkształceń całkowitych w lokalizacjach dystorsyjnych, zależne od dystorsji dynamicznych, które musimy wyznaczyć. Z zastowsownia związków (7.28), (7.29) w układzie równań (6.46) dostajemy od razu oczywisty wynik na zerowanie się z-towych składowych dystorsji, $\hat{\varepsilon}_z(t) \equiv 0$, gdyż w tych lokalizacjach nie ma zmian do modelownia. Z kolei niezerowe funkcje dystorsji wyznaczamy teraz z odpowiednio pomniejszonego układu równań:

$$\sum_{q \in \mathcal{D}_{\mathcal{N}}} A^0_{pq}\, \hat{\varepsilon}_p(t) = b_p(t), \tag{7.31}$$

Funkcje odkształceń całkowitych we wszystkich lokalizacjach dystorsyjnych obliczamy według nieco zmodyfikowanej formuły:

$$\varepsilon_i(t) = \overset{\mathrm{L}}{\varepsilon}_i(t) + \overset{\mathrm{R}}{\varepsilon}_i(t) = \overset{\mathrm{L}}{\varepsilon}_i(t) + \sum_{\tau=0}^{t} \sum_{p \in \mathcal{D}_{\mathcal{N}}} D_{ip}(t-\tau)\, \hat{\varepsilon}_p(\tau), \tag{7.32}$$

w której uwzględniono fakt, że sens ma sumowanie tylko po indeksach $p \in \mathcal{D}_{\mathcal{N}}$, gdzie mamy niezerowe funkcje dystorsji. Pamiętamy ponadto o tym, że część sumowań została już wykonana (przy wyznaczaniu składowych $b_p(t)$ wektora prawej strony układu (7.31)) i należy skorzystać z zależności (7.23).

Spostrzeżenie (7.28) oznacza, że z-towe składowe gradientu dystorsji są równe odpowiednim składowym wektora prawej strony (7.30), zatem wyznaczamy je bezpośrednio ze wzoru:

$$\frac{\partial \hat{\varepsilon}_z}{\partial \lambda_s}(t) = -\frac{\partial \mu_z}{\partial \lambda_s}\, \varepsilon_z(t). \tag{7.33}$$

Pozostaje więc tylko obliczyć pozostałe składowe gradientu dystorsji odpowiadające lokalizacjom $p \in \mathcal{D}_{\mathcal{N}}$, w których występuje zmiana współczynnika sztywności. W tym celu

należy sekwencyjnie rozwiązywać odpowiednio mniejsze (podobnie jak (7.31)) podukłady równań:

$$\sum_{q\in\mathcal{D}_{\mathcal{N}}} A^0_{pq}\,\frac{\partial\hat{\varepsilon}_p}{\partial\lambda_s}(t) = \tilde{B}_{ps}(t), \tag{7.34}$$

Identyczna dla wszystkich tych układów (7.31) i (7.34) macierz główna A^0_{pq} jest kwadratową podmacierzą macierzy A^0_{ij}, powstałą w wyniku usunięcia z-towych wierszy i kolumn. Zauważmy przy tym, że niezerowe przecież składowe A^0_{pz} nie zniknęły – zostają przeniesione na prawą stronę jako mnożniki obliczonych już składowych gradientu. Składowe wektorów prawej strony ulegają więc pewnej modyfikacji (pojawia się dodatkowy czynnik):

$$\tilde{B}_{ps}(t) = B_{ps}(t) - \sum_{z\in\mathcal{D}_{\mathcal{Z}}} A^0_{pz}\,\frac{\partial\hat{\varepsilon}_z}{\partial\lambda_s}(t). \tag{7.35}$$

Wprowadzając oznaczenie:

$$H^0_{pz} = -A^0_{pz} = \big(1-\mu_p(\boldsymbol{\lambda})\big)\,D_{pz}(0) \qquad (p\neq z), \tag{7.36}$$

te zmodyfikowane składowe wektora prawej strony zapisujemy w postaci:

$$\begin{aligned}
\tilde{B}_{ps}(t) &= B_{ps}(t) + \sum_{z\in\mathcal{D}_{\mathcal{Z}}} H^0_{pz}\,\frac{\partial\hat{\varepsilon}_z}{\partial\lambda_s}(t;\boldsymbol{\lambda}) \\
&= \begin{cases}
-\dfrac{\partial\mu_p(\boldsymbol{\lambda})}{\partial\lambda_s}\,\varepsilon_p(0;\boldsymbol{\lambda}) + \displaystyle\sum_{z\in\mathcal{D}_{\mathcal{Z}}} H^0_{pz}\,\frac{\partial\hat{\varepsilon}_z}{\partial\lambda_s}(0;\boldsymbol{\lambda}) & \text{dla}\ \ t=0, \\
-\dfrac{\partial\mu_p(\boldsymbol{\lambda})}{\partial\lambda_s}\,\varepsilon_p(t;\boldsymbol{\lambda}) + \big(1-\mu_p(\boldsymbol{\lambda})\big)\displaystyle\sum_{\tau=0}^{t-1}\sum_{j\in\mathcal{D}} D_{pj}(t-\tau)\,\frac{\partial\hat{\varepsilon}_j(\tau;\boldsymbol{\lambda})}{\partial\lambda_s} & \\
\qquad\qquad + \displaystyle\sum_{z\in\mathcal{D}_{\mathcal{Z}}} H^0_{pz}\,\frac{\partial\hat{\varepsilon}_z}{\partial\lambda_s}(t;\boldsymbol{\lambda}) & \text{dla}\ \ t>0.
\end{cases}
\end{aligned} \tag{7.37}$$

Wykorzystanie przedstawionych optymalizacji pozwala na bardzo znaczne obniżenie kosztów obliczeń numerycznych w przypadku, gdy występują jednostkowe składowe wektora $\boldsymbol{\mu}$. Nie zmniejszamy przy tym wymiaru przestrzeni modyfikacji strukturalnych, ani lokalizacji dystorsyjnych, na które te modyfikacje mogą mieć wpływ.

W końcu możemy zaprezentować tablicę Algorytm 7.2, która zawiera zoptymalizowaną wersję algorytmu 7.1. Posłużyła ona do bardzo efektywnej implementacji obiektowej[43)]. W tablicy stosowano zapis nadający się do bezpośredniego wykorzystania przez programistę – pominięto niektóre z dotychczas stosowanych oznaczeń, zachowując tylko te wielkości, które muszą zaistnieć jako niezależne zmienne w programie (stąd niektóre z nich inicjowane są wartościami, które mogą sugerować niekonsekwencję, czy wręcz niezgodność z wyprowadzonymi wzorami – jest to oczywiście pozorne). Algorytm zapisano

[43)] Tablice jedno-, dwu- i trójwymiarowe przechowywane są w postaci jednowymiarowej (á la FORTRAN); działania przeprowadzane są “*in place*”, bez zbędnego kopiowania, na podmacierzach i podwektorach, stosując procedury przeliczania indeksów “w locie” (oczywista analogia z podzbiorami indeksów).

Algorytm 7.2. Zoptymalizowana wersja algorytmu 7.1.

1. *Dane*:
   (a) Macierze:
   - 2-wymiarowe: $\overset{\text{L}}{\varepsilon}_i(t)$, $\overset{\text{L}}{f}_\alpha(t)$,
   - 3-wymiarowe: $D_{ij}(t)$, $\breve{D}_{\alpha i}(t)$,

   przy czym $i, j \in \mathcal{D}$, $t \in \mathcal{T} = \{0, \ldots, n\}$.

   (b) Funkcja wektorowa $\boldsymbol{\mu}(.)$ oraz funkcja jej gradientu $\frac{d\boldsymbol{\mu}}{d\boldsymbol{\lambda}}(.)$, dzięki którym dla zadanego wektora $\boldsymbol{\lambda} = \left[\lambda_s\right]$ można obliczyć:
   - wektor wartości: $\mu_i(\boldsymbol{\lambda})$,
   - macierz gradientu: $\dfrac{\partial \mu_i}{\partial \lambda_s}(\boldsymbol{\lambda})$,

   przy czym: $i \in \mathcal{D}$.

2. *Obliczenie gradientu*:
   (a) Pobierany jest argument $\boldsymbol{\lambda}$.
   (b) Wykorzystując funkcje $\boldsymbol{\mu}(.)$ oraz $\frac{d\boldsymbol{\mu}}{d\boldsymbol{\lambda}}(.)$:
   - obliczamy: $\tilde{\mu}_i = 1 - \mu_i(\boldsymbol{\lambda})$,
   - inicjujemy: $\dfrac{\partial \hat{\varepsilon}_i}{\partial \lambda_s}(t) = -\dfrac{\partial \mu_i}{\partial \lambda_s}(\boldsymbol{\lambda})$ dla każdego $t \in \mathcal{T}$.

   (c) W zależności od składowych wektora $\tilde{\mu}_i$ określamy zbiory indeksów:
   - $p, q \in \mathcal{D}_\mathcal{N} = \{i \in \mathcal{D} : \ \tilde{\mu}_i \neq 0\}$,
   - $z \in \mathcal{D}_\mathcal{Z} = \{i \in \mathcal{D} : \ \tilde{\mu}_i = 0\}$.

   Zatem $\mathcal{D}_\mathcal{N} \cup \mathcal{D}_\mathcal{Z} = \mathcal{D}$ oraz $\mathcal{D}_\mathcal{N} \cap \mathcal{D}_\mathcal{Z} = \emptyset$.

   (d) Inicjujemy wartość funkcji przejścia: $f_\alpha(t) = \overset{\text{L}}{f}_\alpha(t)$,
   (e) Jeżeli $\mathcal{D}_\mathcal{N} = \emptyset$ to:
   - $\dfrac{\partial \hat{\varepsilon}_i}{\partial \lambda_s}(t) := \dfrac{\partial \hat{\varepsilon}_i}{\partial \lambda_s}(t) \, \overset{\text{L}}{\varepsilon}_i(t)$.

   (f) W przeciwnym przypadku, czyli jeśli $\mathcal{D}_\mathcal{N} \neq \emptyset$:
   - wykonujemy **obliczenia w pętli** (punkt 3.),
   - obliczamy wartość funkcji przejścia:

   $$f_\alpha(t) := f_\alpha(t) + \sum_{\tau=0}^{t} \sum_{p \in \mathcal{D}_\mathcal{N}} \breve{D}_{\alpha p}(t-\tau) \, \hat{\varepsilon}_p(\tau),$$

   (g) Obliczamy gradient funkcji przejścia:
   - $\dfrac{\partial f_\alpha}{\partial \lambda_s}(t) = \displaystyle\sum_{\tau=0}^{t} \sum_{i \in \mathcal{D}} \breve{D}_{\alpha i}(t-\tau) \, \dfrac{\partial \hat{\varepsilon}_i}{\partial \lambda_s}(\tau)$.

[ciąg dalszy na następnej stronie]
↓

Algorytm 7.2. [ciąg dalszy]

↓

[kontynuacja poprzedniej strony]

3. *Obliczenia w pętli*:
   (a) Inicjujemy:
   - $\varepsilon_i(t) = \overset{\scriptscriptstyle L}{\varepsilon}_i(t)$,
   - $\hat{\varepsilon}_p(t) = 0$.

   (b) Obliczamy, a następnie dekomponujemy (rozkład LU) macierz:
   - $A^0_{pq} = \delta_{pq} - \tilde{\mu}_p\, D_{pq}(0)$.

   (c) Jeżeli $\mathcal{D}_{\mathcal{Z}} \neq \emptyset$:
   - $H^0_{pz} = \tilde{\mu}_p\, D_{pz}(0)$.

   (d) Jeżeli $\exists i \in \mathcal{D} \quad \varepsilon_i(0) \neq 0$:
   - wykonujemy **obliczenia w chwili** $t = 0$ (punkt 4.).

   (e) W przeciwnym przypadku, czyli jeśli $\forall i \in \mathcal{D} \quad \varepsilon_i(0) = 0$:
   - przyjmujemy: $\dfrac{\partial \hat{\varepsilon}_i}{\partial \lambda_s}(0) = 0$.

   (f) *Kolejno* dla każdej chwili $t > 0$:
   - wykonujemy **obliczenia w chwili** $t > 0$ (punkt 5.).

4. *Obliczenia w chwili* $t = 0$:
   (a) Jeżeli $\exists p \in \mathcal{D}_{\mathcal{N}} \quad \varepsilon_p(0) \neq 0$:
   - obliczamy wektor prawej strony: $b_p = \tilde{\mu}_p\, \varepsilon_p(0)$,
   - wyznaczamy $\hat{\varepsilon}_p(0)$ z układu równań: $\displaystyle\sum_{q \in \mathcal{D}_{\mathcal{N}}} A^0_{pq}\, \hat{\varepsilon}_q(0) = b_p$,
   - $\varepsilon_i(0) := \varepsilon_i(0) + \displaystyle\sum_{p \in \mathcal{D}_{\mathcal{N}}} D_{ip}(0)\, \hat{\varepsilon}_p(0)$.

   (b) Obliczamy:
   - $\dfrac{\partial \hat{\varepsilon}_i}{\partial \lambda_s}(0) := \dfrac{\partial \hat{\varepsilon}_i}{\partial \lambda_s}(0)\, \varepsilon_i(0)$.

   (c) Obliczamy macierz prawych stron:
   - $B_{ps} = \dfrac{\partial \hat{\varepsilon}_p}{\partial \lambda_s}(0)$,
   - Jeżeli $\mathcal{D}_{\mathcal{Z}} \neq \emptyset$: $B_{ps} := B_{ps} + \displaystyle\sum_{z \in \mathcal{D}_{\mathcal{Z}}} H^0_{pz}\, \dfrac{\partial \hat{\varepsilon}_z}{\partial \lambda_s}(0)$.

   (d) Dla każdego s wyznaczamy:
   - $\dfrac{\partial \hat{\varepsilon}_p}{\partial \lambda_s}(0)$ z układu równań: $\displaystyle\sum_{q \in \mathcal{D}_{\mathcal{N}}} A^0_{pq}\, \dfrac{\partial \hat{\varepsilon}_q}{\partial \lambda_s}(0) = B_{ps}$.

[ciąg dalszy na następnej stronie]

↓

Algorytm 7.2. [dokończenie]

↓
[kontynuacja poprzedniej strony]

5. *Obliczenia w chwili* $t > 0$:
   (a) Dana jest ustalona chwila $t > 0$, przy czym zakładamy, że *kolejno* zostały już wykonane obliczenia dla wszystkich chwil $\tau < t$.
   (b) Obliczamy:
   - $\varepsilon_i(t) := \varepsilon_i(t) + \sum_{\tau=0}^{t-1} \sum_{p\in\mathcal{D}_\mathcal{N}} D_{ip}(t-\tau)\,\hat{\varepsilon}_p(\tau)$,

   (c) Obliczamy wektor prawej strony:
   - $b_p = \tilde{\mu}_p\,\varepsilon_p(t)$.

   (d) Wyznaczamy:
   - $\hat{\varepsilon}_p(t)$ z układu równań: $\sum_{q\in\mathcal{D}_\mathcal{N}} A^0_{pq}\,\hat{\varepsilon}_q(t) = b_p$,

   (e) Kolejno obliczamy:
   - $\varepsilon_i(t) := \varepsilon_i(t) + \sum_{p\in\mathcal{D}_\mathcal{N}} D_{ip}(0)\,\hat{\varepsilon}_p(t)$,
   - $\frac{\partial\hat{\varepsilon}_i}{\partial\lambda_s}(t) := \frac{\partial\hat{\varepsilon}_i}{\partial\lambda_s}(t)\,\varepsilon_i(t)$.

   (f) Obliczamy macierz prawych stron:
   - $B_{ps} = \frac{\partial\hat{\varepsilon}_p}{\partial\lambda_s}(t) + \tilde{\mu}_p \sum_{\tau=0}^{t-1} \sum_{j\in\mathcal{D}} D_{pj}(t-\tau)\,\frac{\partial\hat{\varepsilon}_j}{\partial\lambda_s}(\tau)$,
   - Jeżeli $\mathcal{D}_\mathcal{Z} \neq \emptyset$: $B_{ps} := B_{ps} + \sum_{z\in\mathcal{D}_\mathcal{Z}} H^0_{pz}\,\frac{\partial\hat{\varepsilon}_z}{\partial\lambda_s}(t)$.

   (g) Dla każdego s wyznaczamy:
   - $\frac{\partial\hat{\varepsilon}_p}{\partial\lambda_s}(t)$ z układu równań: $\sum_{q\in\mathcal{D}_\mathcal{N}} A^0_{pq}\,\frac{\partial\hat{\varepsilon}_q}{\partial\lambda_s}(t) = B_{ps}$.

w postaci pięciu punktów: punkt 1 zawiera dane wykorzystywane przez algorytm[44)], natomiast punkt 2 to główny człon algorytmu przeznaczony dla powtarzalnych obliczeń dokonywanych dla zadanych punktów z wektorowej przestrzeni modyfikacji strukturalnych. Dla nietrywialnych przypadków niezbędne będzie wykonanie – opisanych w punkcie 3 – *obliczeń w pętli* (dla kolejnych chwil czasowych). Punkty 4 i 5 stanowią podprocedury wykorzystywane przez procedurę *obliczeń w pętli*.

44) Zauważmy tutaj, że (tak jak w przypadku wszystkich algorytmów prezentowanych do tej pory) argumentami są między innymi funkcje zwracające wektor oraz macierz. Realizacja obiektowa pozwoliła na bardzo eleganckie i czytelne oprogramowanie tego aspektu – parametrami są obiekty, których *metody* obliczają i zwracają potrzebne wielkości (nb. również w postaci obiektów).

7.6. Weryfikacja gradientów analitycznych

7.6.1. Obliczanie gradientu Metodą Różnic Skończonych (MRS)

Pojedynczą składową gradientu funkcji przejścia można obliczać za pomocą klasycznej **Metody Różnic Skończonych**. W tym celu wykorzystujemy poniższy wzór wynikający z definicji pochodnej:

$$\frac{\partial f_\alpha(t;\boldsymbol{\lambda})}{\partial \lambda_s} = \lim_{\Delta\lambda_s \to 0} \frac{f_\alpha(t;[\lambda_r + \delta_{rs}\Delta\lambda_s]) - f_\alpha(t;\boldsymbol{\lambda})}{\Delta\lambda_s}. \tag{7.38}$$

Wielkość $\Delta\lambda_s$ to tzw. *przyrost skończony* dla parametru, po którym obliczamy pochodną, natomiast wektor $\boldsymbol{\lambda} = \left[\lambda_r\right]$ określa punkt w przestrzeni parametrów, w którym tę pochodną obliczamy. Należy szczególnie podkreślić, że ta metoda obliczeń ma charakter czysto numeryczny, tzn. (w przeciwieństwie do podejścia opartego na MIDW) nie bazuje na formułach otrzymanych z analitycznego różniczkowania funkcji przejścia. W związku z tym uzyskiwane za jej pomocą rezultaty obarczone są błędem, który po pierwsze trudno jest oszacować, a ponadto często może mieć on istotny wpływ na zbieżność czy wręcz szanse powodzenia metod optymalizacyjnych wykorzystujących tak obliczone gradienty.

7.6.2. Wady obliczeń metodą różnicową

Poniżej prezentujemy niedogodności wykorzystywania różnic skończonych do obliczania gradientu funkcji przejścia. Wynikają one z ogólnych wad MRS, a ich wpływ potęguje się wraz ze wzrostem wymiaru przestrzeni parametrów, czyli wraz ze wzrostem liczby składowych gradientu. Stosując zatem podejście różnicowe należy zdawać sobie sprawę, że:

- wartość przyrostu skończonego to dodatnia, *arbitralnie mała* liczba – zatem pojawia się tzw. *problem doboru przyrostu*: $\Delta\lambda_s = ?$, z którym wiążą się następujące niedogodności metody:
  - fałszywe wyniki dla zbyt dużej albo zbyt małej wartości przyrostu skończonego,
  - trudność z wyborem, który z wyników otrzymanych dla różnych wartości przyrostu skończonego jest lepszy (tj. bliższy rozwiązania ścisłego);
- zmieniamy pierwotny model konstrukcji – algorytm MRS nie sprowadza się więc tylko do jednej prostej formuły (7.38);
- występuje konieczność obliczania każdej składowej gradientu oddzielnie, przy czym za każdym razem istnieje problem doboru przyrostu oraz konieczność modyfikacji pierwotnego modelu konstrukcji;
- niedokładność obliczonego gradientu jest trudna do oszacowania i często jest odpowiedzialna za niepowodzenie metod, które wykorzystują gradient obliczony w ten sposób (tzw. *problem zbieżności*);
- problemy ze zbieżnością nasilają się zwłaszcza w przypadku zadań o wielu parametrach, a więc korzystających z gradientów o dużej liczbie składowych.

7.6.3. Porównanie wyników otrzymanych za pomocą MIDW z rezultatami obliczeń MRS

W celu weryfikacji zaprezentowanej metody wyznaczania wrażliwości sztywnościowej ustroju dynamicznego i opartego na niej algorytmu 7.2, wykorzystamy model konstrukcji z przykładu 4.4, poddawanej teraz obciążeniu dynamicznemu siłą $P = P(t)$ (patrz rys. 4.1), o różnej zmienności w czasie, podobnie jak to czyniliśmy w testach opisanych w podrozdziale 6.9. W identyczny sposób, jak w tych testach, definiujemy wektor modyfikacji parametrów strukturalnych:

$$\boldsymbol{\lambda} = \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - \hat{E}^{(3)}/E^{(3)} \\ 1 - \hat{E}^{(4)}/E^{(4)} \end{bmatrix},$$

oraz konsekwentnie określamy zależny od niego wektor zmiany współczynników sztywności:

$$\boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{\lambda}) = \begin{bmatrix} \hat{k}^{(3)}_{EA}/k^{(3)}_{EA} \\ \hat{k}^{(4)}_{EA}/k^{(4)}_{EA} \\ \hat{k}^{(4)}_{EJ}/k^{(4)}_{EJ} \\ \hat{k}^{(4)}_{EJ}/k^{(4)}_{EJ} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-\lambda_1 \\ 1-\lambda_2 \\ 1-\lambda_2 \\ 1-\lambda_2 \end{bmatrix}, \qquad \frac{d\boldsymbol{\mu}}{d\boldsymbol{\lambda}}(\boldsymbol{\lambda}) = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 0 & -1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix},$$

przy czym dodatkowo wyznaczyliśmy również macierz gradientu tej zależności.

W różnych punktach $\boldsymbol{\lambda}$ przestrzeni modyfikacji parametrów konstrukcyjnych obliczaliśmy gradienty funkcji przejścia wykorzystując algorytm oparty na MIDW, a wyniki porównywane były z rezultatami obliczeń uzyskanych (dla każdej składowej gradientu oddzielnie) algorytmem MRS dla szeregu coraz mniejszych wartości przyrostu skończonego (o postaci 10^{-n}, $n = 1, \ldots, 12$). Dokonane porównanie potwierdziło w pełni poprawną pracę algorytmu 7.2 – odpowiednie składowe gradientu obliczone obiema metodami wykazywały zgodność z dokładnością do przynajmniej 4-tej cyfry znaczącej (dla drugiej składowej gradientu była to zwykle dokładność do co najmniej 5-tej cyfry znaczącej) dla wszystkich chwil dyskretnych (co sprawdzano automatycznie znajdując chwilę o maksymalnej różnicy pomiędzy wartościami gradientów). Należy tutaj zaznaczyć, że uznanemu za dokładny wynikowi MIDW najbliższe były wartości obliczone według MRS dla przyrostu skończonego z przedziału od 10^{-4} do 10^{-7} (często przy tym różnego dla obu składowych).

Gradienty obliczono między innymi dla obciążenia o postaci (6.53), w punkcie przestrzeni modyfikacji strukturalnych $\boldsymbol{\lambda} = \begin{bmatrix} 0{,}2 & 0{,}3 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$. Zastosowanie algorytmu opartego na MIDW prowadzi do wyników "analitycznych", przy czym od razu otrzymujemy wszystkie składowe gradientu – dla wygody prezentujemy tutaj wyniki w postaci sumy wielkości otrzymanych dla kolejnych chwil dyskretnych:

$$\sum_{t \in \mathcal{T}} \frac{\mathbf{f}(t;\boldsymbol{\lambda})}{\partial \lambda_1} = \begin{bmatrix} 2{,}62125 \\ -3{,}49073 \end{bmatrix} \cdot 10^{-3}, \qquad \sum_{t \in \mathcal{T}} \frac{\mathbf{f}(t;\boldsymbol{\lambda})}{\partial \lambda_2} = \begin{bmatrix} 2{,}50210 \\ -2{,}07948 \end{bmatrix} \cdot 10^{-1}.$$

Rezultaty te należy porównać z wartościami odpowiednich składowych gradientu przedstawionymi w tablicy 7.1, a otrzymanymi za pomocą MRS dla kilkunastu różnych wartości przyrostu skończonego $\Delta\lambda_s$. W tablicy zaznaczono wartości, najbliższe tym uzyskanym przez algorytm oparty na MIDW, uznanym za wartości dokładne ("analityczne"). Jak widać, w dwóch przypadkach uzyskano zgodność do 4-ech, w jednym do 5-ciu, a w jeszcze jednym nawet do 6-ciu cyfr znaczących.

Tablica 7.1. Składowe gradientu obliczone Metodą Różnic Skończonych.

$$\text{Dla}\ \ \Delta\lambda_s = \frac{1}{10^n}: \quad \sum_{t\in\mathcal{T}} \frac{\partial f_\alpha(t;\boldsymbol{\lambda})}{\partial\lambda_s} = g_{\alpha s},\ \ \text{gdzie:}$$

	$g_{\alpha s}$			
	$\alpha = 1$		$\alpha = 2$	
n	$s = 1$ [10^{-3}]	$s = 2$ [10^{-1}]	$s = 1$ [10^{-3}]	$s = 2$ [10^{-1}]
1	3,53360	2,84779	-6,56098	-2,34564
2	2,72991	2,53375	-3,90162	-2,10374
3	2,63216	2,50524	-3,53219	-2,08188
4	2,62233	2,50241	-3,49488	-2,07972
5	► 2,62132 ◄	2,50213	► -3,49120 ◄	-2,07950
6	2,61882	► 2,50209 ◄	-3,49148	► -2,07948 ◄
7	2,59835	2,50196	-3,49359	-2,07950
8	2,61101	2,50102	-3,49440	-2,07951
9	1,73609	2,49087	-3,82831	-2,08077
10	-16,23030	2,34426	-7,66516	-2,12109
11	-86,55338	0,31230	-37,35931	-2,56325
12	-586,31790	-1,25499	-25,94496	-1,35112

► ◄ – wielkości najbliższe gradientowi "analitycznemu" (MIDW)

Rozdział 8

Identyfikacja defektów

8.1. Wprowadzenie

W poprzednim rozdziale przedstawiono oparty na MIDW algorytm gradientowej analizy propagacji fali sprężystej zweryfikowano jego poprawność za pomocą Metody Różnic Skończonych. W tym rozdziale w celu niebanalnego przetestowania algorytmu zostanie on wykorzystany dla zagadnienia identyfikacji defektów bazującej na analizie (w domenie czasowej) odpowiedzi sprężystej konstrukcji poddanej wymuszeniu dynamicznemu. Metoda identyfikacji opierać się będzie na analizie różnicy pomiędzy funkcjami przejścia opisującymi propagację fali sprężystej w konstrukcji rzeczywistej i w modelu MES, w którym wpływ ewentualnych defektów modelowany jest wirtualnie (i w sposób zautomatyzowany, pod kontrolą algorytmu) przez dystorsje. Omówione zostanie zagadnienie identyfikacji uszkodzeń w kratownicach na prostych przykładzie wykorzystującym symulacje numeryczne. Na koniec zaprezentowana zostanie identyfikacja defektów bazująca na funkcjach przejścia uzyskanych z przeprowadzonego eksperymentu, w którym zajmowano się badaniem drgań sprężystej belki wspornikowej. W doświadczeniu tym w celu odczytania funkcji przejścia, jak również wzbudzenia fali sprężystej, skorzystano ze zjawiska tzw. *piezoelektryczności*. W założeniu zresztą *piezodiagnostyka* stanowić będzie punkt wyjściowy dla prezentowanej koncepcji identyfikacji uszkodzeń, zatem następny podrozdział poświęcony jest właśnie temu zagadnieniu.

8.2. Podstawy piezodiagnostyki

8.2.1. Efekt piezoelektryczny

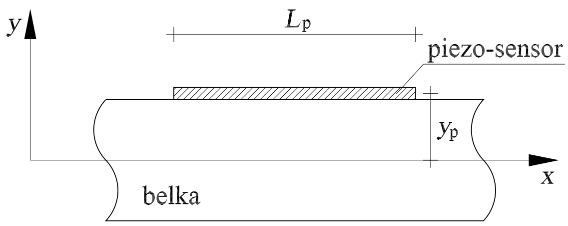
Piezodiagnostyka polega na wykorzystaniu sensorów wykonanych z materiałów piezoelektrycznych w celu, na przykład, odczytywania lokalnych stanów odkształcenia w konstrukcjach. Piezoelektryki są to kryształy, w których występuje tzw. **efekt piezoelektryczny**. Rozróżnia się dwa rodzaje tego zjawiska:

- *prosty efekt piezoelektryczny* – polega na pojawieniu się różnoimiennych ładunków elektrycznych na przeciwległych i asymetrycznych względem siebie elementach powierzchniowych kryształów pizoelektryków pod wpływem nacisku bądź rozciągania,
- *odwrotny efekt piezoelektryczny* – wywoływanie mechanicznej deformacji tych kryształów pod wpływem zewnętrznego pola elektrycznego.

Stosowanie materiałów piezoelektrycznych umożliwia więc przetwarzanie napięć i impulsów mechanicznych na elektryczne i odwrotnie. Zatem materiały te świetnie nadają się na sensory takich wielkości fizycznych jak nawet bardzo niewielkie odkształcenia, czy przemieszczenia (spełniające zazwyczaj postulat tzw. małych przemieszczeń). Zjawisko odwrotnego efektu piezoelektrycznego pozwala z kolei na równoczesne wykorzystanie tych materiałów w celu wymuszania lokalnych deformacji – znajdują więc one zastosowanie m.in. w precyzyjnie sterowanych generatorach fal mechanicznych.

8.2.2. Piezodiagnostyka w konstrukcjach prętowych

Przykłady oraz eksperyment zaprezentowane w niniejszej pracy dotyczyć będą konstrukcji prętowych, zatem skupimy się teraz na dokładniejszym omówieniu zagadnienia piezodiagnostyki dla tego typu ustrojów. Modelowanie oddziaływania elementów piezoelektrycznych w konstrukcjach omówiono m.in. w pracach [43, 44].



Rys. 8.1. Belka z piezo-sensorem.

Rozpatrzmy belkę, na którą naklejony jest sensor wykonany z materiału piezoelektrycznego (rys. 8.1). Odczyt (czyli ładunek elektryczny) na sensorze zależy zarówno od odkształceń podłużnych jak i zgięciowych belki pod sensorem:

$$Q_\text{p} = \int_{L_\text{p}} c_\text{p} \Big[\epsilon_x(x) + y_\text{p}\, \kappa_z(x)\Big]\, dx = c_\text{p}\Bigg[\int_{L_\text{p}} \epsilon_x(x)\, dx + y_\text{p} \int_{L_\text{p}} \kappa_z(x)\, dx\Bigg]. \tag{8.1}$$

W powyższej formule c_p oznacza charakterystykę piezoelektryczną piezo-sensora, (zależną od jego wymiarów i oczywiście materiału piezoelektrycznego, z którego został wykonany), natomiast y_p to odległość pomiędzy osią belki a osią naklejonego na nią piezo-sensora, o długości L_p. Sensor jest zazwyczaj cienką płytką piezo-ceramiczną, naklejoną na powierzchnię belki – za jego charakterystykę możemy wtedy przyjmować iloczyn jego grubości i szerokości oraz stałej piezoelektrycznej materiału. Grubość jest na tyle znikoma w porównaniu z pozostałymi wymiarami, że jej zmiana wynikająca z odkształcenia sensora w żaden istotny sposób nie wpływa na sumaryczną zmianę objętości sensora, która jest odpowiedzialna za wartość odczytu. W przypadku sensorów na elementach prętowych w jawny sposób nie uwzględniamy również zmiany szerokości, jako będącej pochodną istotnej zmiany długości sensora, powstałej w wyniku odkształcenia pręta. Przyjmujemy przy tym, że szerokość piezo-sensora jest raczej wyraźnie mniejsza od jego długości.

W ostatnim członie wzoru (8.1) przyjęto, że c_p oraz y_p są stałe względem współrzędnej x. Postulując, że $c_\mathrm{p} = c_\mathrm{p}(x) \neq \mathrm{const}$ możemy uwzględniać zmienną szerokość sensora piezoelektrycznego naklejonego na belkę. Oczywiście w praktyce szerokość sensora powinna być stała. Natomiast $y_\mathrm{p} = y_\mathrm{p}(x) \neq \mathrm{const}$ oznacza, że zmienna jest wysokość przekroju belki pod sensorem.

Przyjmijmy następujące oznaczenia

$$\tilde{\epsilon}_x \stackrel{\mathrm{def}}{=} \int_{L_\mathrm{p}} \epsilon_x(x)\, dx, \qquad \tilde{\kappa}_z \stackrel{\mathrm{def}}{=} \int_{L_\mathrm{p}} \kappa_z(x)\, dx, \tag{8.2}$$

i zauważmy, że $\tilde{\epsilon}_x$ opisuje tę część całkowitej zmiany długości sensora, która pochodzi od osiowego rozciągania (ściskania) fragmentu belki, zaś iloczyn $y_\mathrm{p}\,\tilde{\kappa}_z$ określa część, która jest wynikiem zginania belki. Wzór (8.1) zapisujemy teraz w postaci:

$$Q_\mathrm{p} = c_\mathrm{p}\big(\tilde{\epsilon}_x + y_\mathrm{p}\,\tilde{\kappa}_z\big). \tag{8.3}$$

Rozpatrzmy dwa skrajne przypadki.

- Jeśli $\tilde{\epsilon}_x \gg y_\mathrm{p}\,\tilde{\kappa}_z$, to:

$$Q_\mathrm{p} \simeq c_\mathrm{p}\,\tilde{\epsilon}_x. \tag{8.4}$$

  Sytuacja ta w praktyce zachodzi wtedy, gdy odkształcenia krzywiznowe są pomijalnie mniejsze od odkształceń osiowych. Występować ona może w tych elementach konstrukcji, które przy danym sposobie obciążenia są głównie rozciągane, bądź ściskane. Najczęściej zresztą elementy te powinny być traktowane w modelu matematycznym jak pręty kratowe (o ile oczywiście nie powoduje to geometrycznej zmienności), dla których odkształcenia krzywiznowe są *a priori* zerowe. Czasem jednak z jakiś przyczyn mogą interesować nas właśnie tylko odkształcenia osiowe elementu, który podlega również znaczącej deformacji zgięciowej. Można wtedy doświadczenie przeprowadzać w ten sposób, że na element ten naklejone są dwa identyczne piezo-sensory, symetrycznie do jego górnych i dolnych włókien. Średnia arytmetyczna z odczytów uzyskanych z obu tych sensorów będzie proporcjonalna do całkowitych odkształceń osiowych tego elementu, czyli:

$$\frac{Q_\mathrm{pg} + Q_\mathrm{pd}}{2} = c_\mathrm{p}\,\tilde{\epsilon}_x, \tag{8.5}$$

gdzie Q_{pg}, Q_{pd} to odczyty na (odpowiednio) górnym i dolnym sensorze. Zatem jak widać istotny jest wtedy sumaryczny odczyt z obu sensorów, co zresztą można łatwo zrealizować już na poziomie urządzeń mierniczych.

- Często $\tilde{\epsilon}_x \ll y_{\mathrm{p}}\,\tilde{\kappa}_z$ – wtedy:

$$Q_{\mathrm{p}} \simeq c_{\mathrm{p}}\,y_{\mathrm{p}}\,\tilde{\kappa}_z. \tag{8.6}$$

Iloczyn $c_{\mathrm{p}}\,y_{\mathrm{p}}$ tworzy jedną stałą proporcjonalności pomiędzy ładunkiem elektrycznym, a zmianą długości sensora wynikłą z odkształceń krzywiznowych belki. Widać zatem, że w praktyce odczyt na sensorze jest proporcjonalny do krzywizny belki. Ta sytuacja dosyć często występuje w praktyce, tzn. w wielu konstrukcjach ramowych występują elementy, których skrajne włókna są rozciągane i ściskane głównie w wyniku zginania, a odkształcenia osiowe są przynajmniej kilkaset razy mniejsze[45)]. Dwa identyczne piezo-sensory naklejone symetryczne do górnych i dolnych włókien belki pozwalają na rejestrację całkowitej zmiany krzywizny fragmentu belki z sensorami, jeśli skorzystamy ze wzoru:

$$\frac{Q_{\mathrm{pg}} - Q_{\mathrm{pd}}}{2} = c_{\mathrm{p}}\,y_{\mathrm{p}}\,\tilde{\kappa}_z. \tag{8.7}$$

Oczywiście w praktyce długość sensora jest zwykle dużo mniejsza niż długość elementu belkowego, $L_{\mathrm{p}} \ll L_{\mathrm{belki}}$, i rezultaty otrzymane z pomiarów można interpretować jako proporcjonalne do średniej krzywizny w punktach osi belki położonych w lokalizacji sensora.

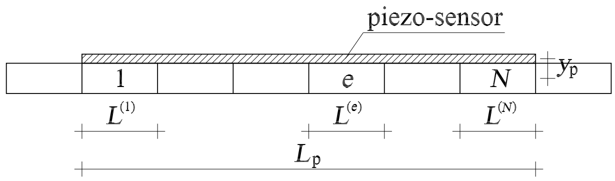
8.2.3. Wyznaczanie odczytu piezo-sensorów w modelu MES

Przedstawione powyżej zależności ilustrują co tak naprawdę oznaczają pomiary otrzymane z eksperymentu, a więc w jaki sposób można je interpretować. Zazwyczaj wyniki eksperymentalne potrzebne są do weryfikacji wyników otrzymanych z modelu numerycznego konstrukcji. Zajmiemy się więc teraz tym w jaki sposób korzystać z obliczeń modelu MES w celu wyznaczenia odczytów z piezo-senosrów naklejonych na elementy ramowe. Przyjmować przy tym będziemy prosty model relacji konstrukcja – sensor, w którym całkowicie pomijać będziemy fakt występowania senora i jego wpływu na konstrukcję. Taki model jest usprawiedliwiony m.in. niewielkimi wymiarami sensora.

Przyjmijmy dla uproszczenia, że pod sensorem piezoelektrycznym znajduje się N elementów skończonych[46)], $e = 1, \ldots, N$, czyli długość sensora wynosi $L_{\mathrm{p}} = \sum_{e=1}^{N} L^{(e)}$, tak jak to przedstawiono na rys. 8.2. Całka odkształceń osiowych elementów pod sensorem

[45)] Przypomnijmy, że na tej obserwacji bazuje klasyczna Metoda Przemieszczeń, która przyjmuje upraszczające założenie osiowej nieściśliwości elementów. Metoda ta daje zadowalająco dokładne wyniki dla ram, w których liczba prętów kratowych jest znacząco mniejsza niż liczba pozostałych elementów pracujących głównie w stanie zgięciowym.

[46)] W praktyce podział konstrukcji na elementy skończone można łatwo dostosować tak, aby ten postulat był spełniony.



Rys. 8.2. Elementy skończone z piezo-sensorem.

jest równa:

$$\tilde{\epsilon}_x = \int\limits_{L_p} \epsilon_x(x)\,dx = \sum_{e=1}^{N} \int\limits_{L^{(e)}} \epsilon_x^{(e)}(x)\,dx = \sum_{e=1}^{N} \frac{L^{(e)}}{2} \int\limits_{-1}^{1} \epsilon_x^{(e)}(\xi)\,d\xi$$
$$= \sum_{e=1}^{N} \frac{L^{(e)}}{2} \int\limits_{-1}^{1} \varepsilon_x^{(e)}\,d\xi = \sum_{e=1}^{N} L^{(e)}\,\varepsilon_x^{(e)} = \sum_{e=1}^{N} \left(u_2^{(e)} - u_1^{(e)}\right) = u_2^{(N)} - u_1^{(1)}, \quad (8.8)$$

natomiast całka krzywizny wynosi:

$$\tilde{\kappa}_z = \int\limits_{L_p} \kappa_z(x)\,dx = \sum_{e=1}^{N} \int\limits_{L^{(e)}} \kappa_z^{(e)}(x)\,dx = \sum_{e=1}^{N} \frac{L^{(e)}}{2} \int\limits_{-1}^{1} \kappa_z^{(e)}(\xi)\,d\xi$$
$$= \sum_{e=1}^{N} \frac{L^{(e)}}{2} \int\limits_{-1}^{1} \left(\varkappa_z^{(e)} + \chi_z^{(e)}\xi\right) d\xi = \sum_{e=1}^{N} L^{(e)}\,\varkappa_z^{(e)} = \sum_{e=1}^{N} \left(\varphi_2^{(e)} - \varphi_1^{(e)}\right) = \varphi_2^{(N)} - \varphi_1^{(1)}. \quad (8.9)$$

W powyższych rachunkach zastosowano definicje (3.50)-(3.52) oraz skorzystano z następujących zależności

$$u_2^{(e)} = u_1^{(e+1)}, \qquad \varphi_2^{(e)} = \varphi_1^{(e+1)}, \qquad e = 1, \ldots, (N-1). \quad (8.10)$$

Jak widać rezultaty przeprowadzonego całkowania nie zależą od ilości elementów pod sensorem, a tylko od różnic pomiędzy obrotami i przemieszczeniami skrajnych węzłów.

Wyprowadzone do tej pory formuły dotyczą zarówno statyki jak i dynamiki. Oczywiście w praktyce o wiele większe zastosowanie ma piezodiagnostyka propagacji fal sprężystych w układach dynamicznych. W przypadku dynamiki wyprowadzone wzory zachowują swą aktualność, przy czym wszystkie występujące w nich wielkości opisujące odkształcenia, przemieszczenia, czy ładunek elektryczny na piezo-senosrze są teraz funkcjami czasu. Zatem wzór (8.3), po uwzględnieniu dodatkowo (8.9) i (8.8), przyjmuje postać

$$Q_p(t) = c_p\Big(\tilde{\epsilon}_x(t) + y_p\,\tilde{\kappa}_z(t)\Big) = c_p\Big[u_2^{(N)}(t) - u_1^{(1)}(t) + y_p\Big(\varphi_2^{(N)}(t) - \varphi_1^{(1)}(t)\Big)\Big], \quad (8.11)$$

Propagacja fali podłużnej i giętnej jest różna – fale te rozchodzą się z różnymi prędkościami. Zwykle więc odczyt na piezo-sensorze zależy od odkształceniowej funkcji przejścia

tylko jednego rodzaju. Zatem w przypadku pomiaru tylko odkształceń osiowych wykorzystujemy następującą wzoru

$$Q_{\mathrm{p}}(t) = c_{\mathrm{p}}\, \tilde{\epsilon}_x(t) = c_{\mathrm{p}} \Big(u_2^{(N)}(t) - u_1^{(1)}(t) \Big), \tag{8.12}$$

natomiast odczyt zmiennych w czasie odkształceń krzywiznowych obliczamy według formuły

$$Q_{\mathrm{p}}(t) = c_{\mathrm{p}}\, y_{\mathrm{p}}\, \tilde{\kappa}_z(t) = c_{\mathrm{p}}\, y_{\mathrm{p}} \Big(\varphi_2^{(N)}(t) - \varphi_1^{(1)}(t) \Big). \tag{8.13}$$

8.3. Zagadnienie identyfikacji defektów

8.3.1. Koncepcja identyfikacji defektów oparta na analizie propagacji fali sprężystej

Proponowane podejście do problemu identyfikacji defektów bazuje na zaprezentowanej koncepcji piezodiagnostyki. Na konstrukcję nałożona jest siatka sensorów piezoelektrycznych, które odczytują funkcję przejścia, a więc pozwalają na rejestrację propagacji fali sprężystej wzbudzonej w układzie. Te same piezo-sensory mogą również służyć jako piezo-aktywatory[47)] precyzyjnie realizujące wymuszenia w różnych miejscach konstrukcji, dla sygnałów o różnych postaciach, częstotliwościach itd. Zauważmy, że zagadnienie (efektywnego i oszczędnego) rozmieszczenia piezo-sensorów zależy od wielu różnych czynników i stanowi problem sam w sobie – nie będziemy się więc tutaj nim zajmować. W wielu przypadkach jednak praktyczną powinna okazać się siatka o dość regularnej budowie.

Rozchodzenie się fali sprężystej w konstrukcji zależy od jej budowy, od jej częstości i postaci drgań własnych, jak również oczywiście od postaci sygnału wymuszającego. Zakładamy, że znana jest funkcja wzbudzająca falę[48)]. Analiza otrzymanych funkcji przejścia powinna prowadzić do określenia miejsca i przybliżonej intensywności ewentualnych defektów.

Przyjmujemy prosty model uszkodzenia, uznając, iż defekt jest tożsamy z obniżeniem odpowiednich parametrów sztywności elementu konstrukcji. Parametry skojarzone ze zmianą (obniżeniem) sztywności elementów konstrukcji, w których dopuszczamy możliwość wystąpienia wykrywalnego defektu składają się na **wektor defektów**, $\boldsymbol{\lambda} = \big[\lambda_s\big]$. W poprzednich rozdziałach pokazaliśmy, że istnieje jednoznaczny związek pomiędzy zmianą sztywności, a dystorsją wirtualną, zatem wpływ defektów na konstrukcję można modelować dystorsjami nie zmieniając pierwotnego modelu konstrukcji.

Funkcja celu problemu identyfikacji zależeć będzie od różnicy pomiędzy funkcjami przejścia: doświadczalną oraz obliczoną przy wykorzystaniu modelu MES. Parametrami sterującymi będą składowe wektora defektów, λ_s. Identyfikacja uszkodzeń polegać

47) Zwykle wzbudzenie w rzeczywistej konstrukcji *dobrze rejestrowalnej* fali sprężystej wymaga dostarczenia energii większej niż ta, którą dysponujemy wykorzystując naklejony piezoelektryk. Stosuje się więc często specjalne piezo-aktywatory ze wzmocnieniem, bądź też aktywatory nie korzystające z materiałów piezoelektrycznych.

48) Wybór odpowiedniego sygnału wzbudzającego stanowi jeden z kluczowych problemów dla zagadnienia identyfikacji.

będzie na minimalizacji funkcji celu ze względu na składowe wektora defektów, przy czym optymalizacja ta opierać się będzie na analitycznych formułach na gradient funkcji celu, otrzymanych dzięki zastosowaniu MIDW.

8.3.2. Funkcja celu problemu identyfikacji

Funkcję celu problemu identyfikacji defektów definiujemy jako średnią, kwadratową miarę z odległości pomiędzy funkcjami przejścia otrzymanymi z eksperymentu przeprowadzonego na rzeczywistej konstrukcji oraz z obliczeń wykonanych na modelu numerycznym:

$$f_{\text{ident}}(\boldsymbol{\lambda}) = \sum_{\alpha} \sum_{t} \left[f_{\alpha}(t, \boldsymbol{\lambda}) - \overset{\text{M}}{f}_{\alpha}(t) \right]^2, \qquad \boldsymbol{\lambda} \in \mathcal{L}. \tag{8.14}$$

W powyższej formule $\overset{\text{M}}{f}_{\alpha}(t)$ oznacza wyniki uzyskane z eksperymentu (piezodiagnostyka), natomiast $f_{\alpha}(t, \boldsymbol{\lambda})$ to funkcje przejścia obliczane na podstawie modelu numerycznego (algorytmy MES+MIDW). Ilośc tych funkcji zależy od liczby sensorów, na których odczytywane są funkcje przejścia. Funkcje przejścia obliczane numerycznie zależą od wektora $\boldsymbol{\lambda} = [\lambda_s]$ grupującego parametry potencjalnych defektów i stanowiącego w związku z tym **wektor parametrów funkcji celu**. Na parametry te nałożone są ograniczenia, które wyznaczają zbiór $\mathcal{L}$, i które definiować zwykle będziemy w następujący sposób:

$$\boldsymbol{\lambda} = [\lambda_s] \in \mathcal{L} \quad \Longleftrightarrow \quad \lambda_s \in \langle \lambda_s^{\text{min}}, \lambda_s^{\text{max}} \rangle, \tag{8.15}$$

przy czym często przyjmować możemy

$$\lambda_s^{\text{min}} = 0, \qquad \lambda_s^{\text{max}} = 1, \tag{8.16}$$

na przykład, gdy defekt modelujemy jako obniżenie modułu Younga dla materiału elementu:

$$\lambda_s = 1 - \frac{\hat{E}^{(s)}}{E^{(s)}}. \tag{8.17}$$

Rozróżniamy przy tym dwa skrajne przypadki:

- $\lambda_s = 0$ – oznacza, iż w elemencie s defekt w ogóle nie wystepuje[49],
- $\lambda_s = 1$ – oznacza, że element uległ na tyle poważnemu uszkodzeniu, że nie może już przenosić żadnych naprężeń i został niejako całkowicie wyeliminowany z konstrukcji[50].

Funkcja identyfikacji (8.14) spełnia założenia podane w rozdziale 7 i jest prostym przykładem funkcji o postaci (7.4), przy czym składowe wektora zależnego od chwilowych stanów konstrukcji definiujemy oczywiście jako:

$$F_t(\boldsymbol{\lambda}) = \sum_{\alpha} \left[f_{\alpha}(t, \boldsymbol{\lambda}) - \overset{\text{M}}{f}_{\alpha}(t) \right]^2. \tag{8.18}$$

[49] W praktyce brak defektu będziemy utożsamiać z rezultatem $\lambda \approx 0$, eliminując w ten sposób wpływ błędów metody i pomiarów. Dokładne zdefiniowanie tego przybliżenia stanowić będzie oczywiście istotny problem, zależny od konkretnej konstrukcji, wyników pomiarów, branych pod uwagę defektów i strategii ich identyfikacji.

[50] Czasem będzie można tak uznać dla $\lambda_s \approx 1$ (patrz poprzedni przypis), oczywiście o ile nie powoduje to zamiany konstrukcji w mechanizm.

Gradient funkcji celu problemu identyfikacji ma zatem prostą postać:

$$\frac{\partial f_{\text{ident}}(\boldsymbol{\lambda})}{\partial \lambda_s} = 2 \sum_{\alpha} \sum_{t} \left[f_\alpha(t, \boldsymbol{\lambda}) - \overset{\mathrm{M}}{f}_\alpha(t) \right] \frac{\partial f_\alpha(t, \boldsymbol{\lambda})}{\partial \lambda_s}, \tag{8.19}$$

skąd widać, że istotę obliczeń stanowić będzie wyznaczenie gradientu funkcji przejścia. Potrzebne również będą wartości funkcji przejścia, które jednak można obliczyć prawie bez dodatkowych kosztów numerycznych w trakcie obliczania ich gradientu.

8.3.3. Algorytm identyfikacji defektów

Algorytm identyfikacji ma postać iteracyjną: w kolejnych iteracjach wyznacza się pewną przybliżoną wartość wektora defektów, która w zasadzie powinna być bliższa poszukiwanego rozwiązania, niż wartości z iteracji wcześniejszych. Sposób obliczania tej wartości opiera się na tzw. *metodzie "największego spadku"*. Mając w i-tej iteracji wektor defektów (którego składowe są również parametrami funkcji celu) oraz obliczony dla niego gradient funkcji celu, składowe wektora dla $(i+1)$-szej iteracji obliczamy według formuły podobnej do poniższej:

$$\lambda_s^{(i+1)} = \lambda_s^{(i)} - \frac{\dfrac{\partial f_{\text{ident}}}{\partial \lambda_s}(\boldsymbol{\lambda}^{(i)})}{\max|\,\text{grad}|}\,\Delta, \tag{8.20}$$

gdzie: $\max|\,\text{grad}|$ jest wielkością zależną zwykle od maksymalnej wartości z modułów wszystkich składowych gradientu[51] $\frac{\partial f_{\text{ident}}}{\partial \boldsymbol{\lambda}}(\boldsymbol{\lambda}^{(i)})$, natomiast Δ jest pewnym małym przyrostem (jego wielkością również można sterować, np. odpowiednio zmniejszając w kolejnych iteracjach). Widać zatem, iż wektor defektów jest zarazem wektorem parametrów sterujących optymalizacją funkcji celu. Ogólny schemat każdej iteracji jest następujący:

- pobranie argumentu czyli wartości wektora defektów $\boldsymbol{\lambda}$ (w pierwszej iteracji inicjujące wartości na składowe wektora defektów zwykle opisują brak uszkodzenia),
- obliczenie gradientu funkcji przejścia oraz jej wartości w zadanym punkcie $\boldsymbol{\lambda}$ przestrzeni parametrów (dzięki algorytmowi opartemu na MIDW),
- wykorzystanie obliczonych wielkości do obliczenia gradientu funkcji celu,
- wykorzystanie obliczonego gradientu do wyznaczenia kolejnego przybliżenia (nowego punktu $\boldsymbol{\lambda}$) – stosując podejście oparte na metodzie "największego spadku",
- uwzględnienie ograniczeń na parametry funkcji celu, czyli ewentualna modyfikacja niektórych parametrów tak, aby: $\boldsymbol{\lambda} \in \mathcal{L}$,
- sprawdzenie warunku na wartość funkcji celu i (w zależności od rezultatu) rozpoczęcie nowej iteracji, bądź ewentualne zakończenie procesu.

Dodatkowo można stosować pewne strategie optymalizacyjne, zwiększające szybkość i poprawiające zbieżność, jak, np.: kontrolowane zarządzanie wektorem defektów na kolejnych krokach iteracji. W tym kontekście można zaproponować dwie metody postępowania:

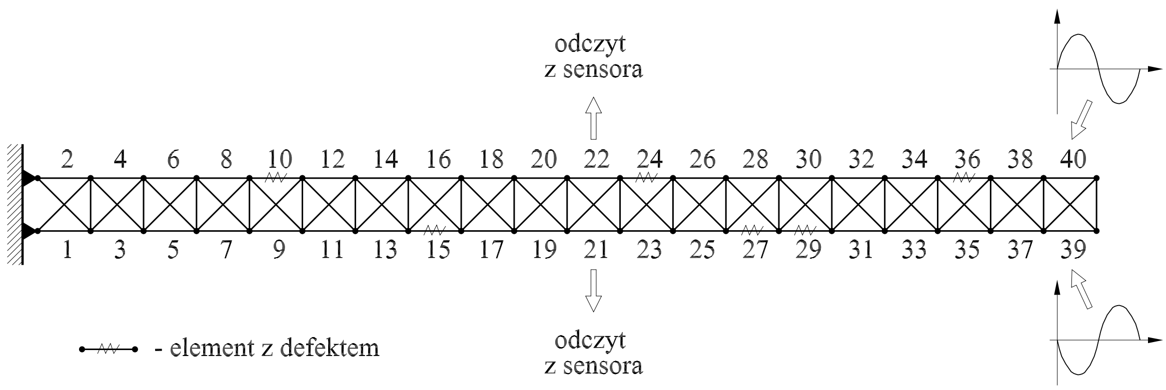
[51] Można również przyjmować maksymalną spośród bezwzględnych wartości składowych z pierwszej iteracji, gdzie gradienty powinny być największe.

1. całkowita eliminacja tych składowych wektora defektów, które w dotychczasowych iteracjach nie odbiegały zbytnio od wartości początkowych – uznajemy, że w tych lokalizacjach nie ma defektu i zmniejszamy liczbę składowych wektora $\boldsymbol{\lambda}$, a więc obniżamy wymiar przestrzeni parametrów funkcji celu (schodzimy do podprzestrzeni o mniejszym wymiarze), składowe gradientu odpowiadające tym lokalizacją nie są liczone,
2. przy obliczaniu gradientu kontrolowane przyjmowanie dla tych składowych wartości początkowych, tj. opisujących brak defektu, a więc brak modyfikacji, co efektywnie wykorzystuje algorytm obliczania gradientu funkcji przejścia (patrz paragraf 7.5.2) – znajdujemy się na pewnej hiper-płaszczyźnie, ale nadal w pełnej przestrzeni wektora defektów (są liczone wszystkie składowe gradientu i w razie potrzeby możemy, np., przejść na inną hiper-płaszczyznę: prostopadłą lub o innym wymiarze).

Można oczywiście stosować obie strategie jednocześnie (tzn. niektóre ze składowych eliminujemy całkowicie, dla innych zaś gradient obliczamy przyjmując w kolejnych iteracjach wartości pierwotne, o ile odpowiadające im składowe gradientu mają bezwzględne wartości dużo mniejsze od modułów pozostałych składowych).

8.4. Identyfikacja defektów na przykładzie wspornika kratowego

Przeprowadzono test numeryczny algorytmu wrażliwości MIDW w zadaniu identyfikacji defektów wspornika kratowego przedstawionego na rys. 8.3, składającego się z elementów o identycznym materiale i przekroju. Przyjęto, że kratownica jest wprowadzana w drgania poprzez aktywatory umiejscowione na końcu wspornika (na elementach nr 39 i 40), generujące sinusoidalne wymuszenie o tym samym natężeniu, lecz o przeciwnych fazach (rys. 8.3). Na elementach nr 21 i 22 umieszczone są sensory rejestrujące zmianę długości tych prętów (tj. funkcje przejścia w postaci odkształceń podłużnych). Dla zadanego wymuszenia funkcje przejścia wyznaczono numerycznie najpierw dla przypadku



Rys. 8.3. Wspornik kratowy.

konstrukcji bez uszkodzeń, a później dla kratownicy "uszkodzonej" – założono, że kilka prętów pasa górnego i dolnego ma defekt obniżający ich sztywność, co zamodelowano przypisując indywidualnie każdemu z tych elementów materiał o odpowiednio obniżonym module Younga. Wielkość przyjętych defektów dla konkretnych elementów podano w tablicy 8.1, lokalizację zaznaczono również na rys. 8.3, natomiast funkcje przejścia "odczytane" z obu sensorów przedstawiono na rys. 8.4.

Tablica 8.1. Przyjęte wartości defektów w prętach kratownicy.

numer elementu:	$e =$	10	15	24	27	29	36
zmiana sztywności:	$\mu_{EA}^{(e)} = \frac{\hat{E}^{(e)}}{E^{(e)}} =$	0,8	0,7	0,6	0,6	0,7	0,5
wielkość defektu:	$1 - \mu_{EA}^{(e)} =$	20%	30%	40%	40%	30%	50%

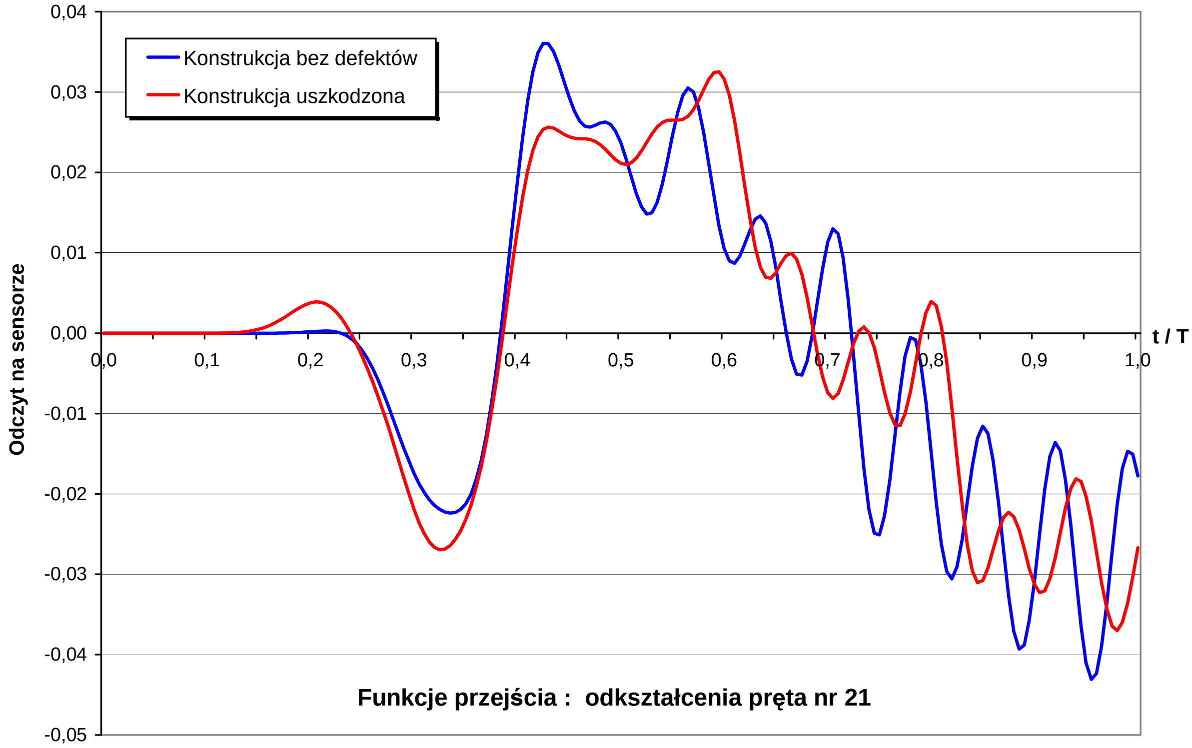
W postawionym zadaniu identyfikacji defektów przyjęto, że uszkodzeń poszukujemy tylko w elementach obu pasów kratownicy – z wyjątkiem elementów z aktywatorami – a więc w prętach o numerach od 1 do 38 (rys. 8.3). Proces identyfikacji wykorzystywał bazujący na MIDW algorytm wrażliwości sztywnościowej ustroju dynamicznego i był prostą realizacją metodologii opisanej w poprzednim paragrafie. W celach porównawczych przeprowadzono właściwie trzy niezależne procesy:

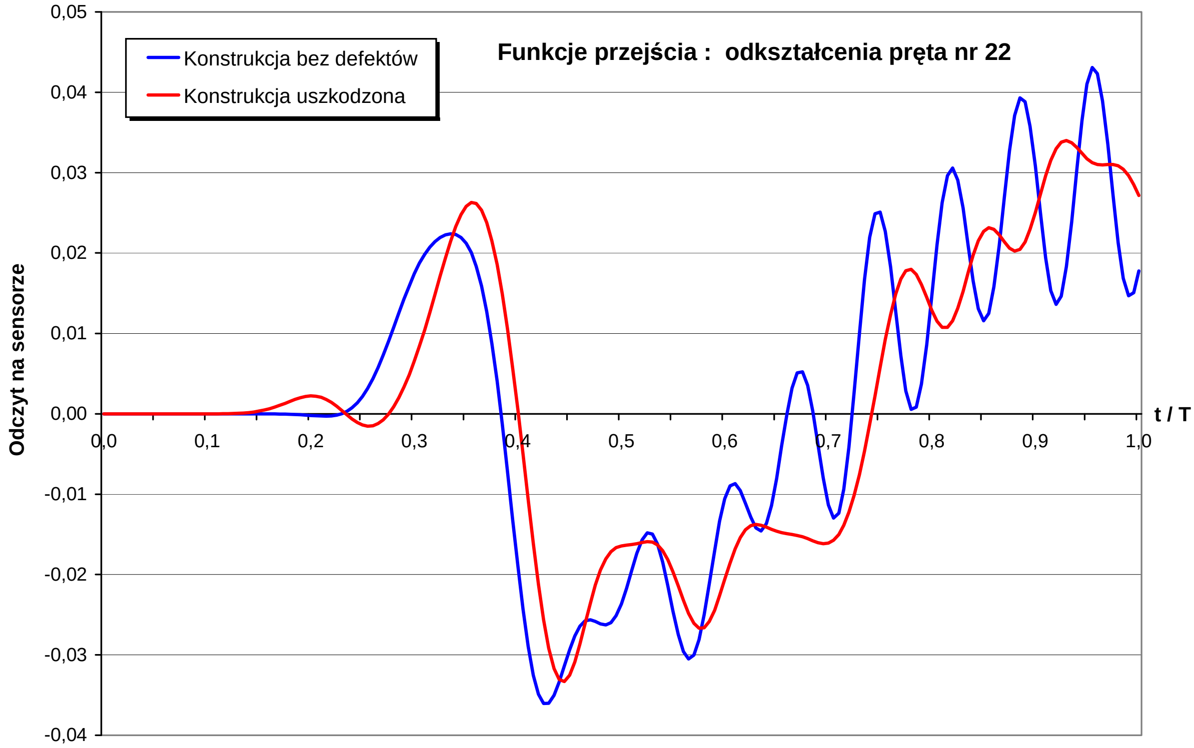
1. identyfikacja korzystająca z "odczytów" z sensora na elemencie nr 21,
2. identyfikacja korzystająca z "odczytów" z sensora na elemencie nr 22,
3. identyfikacja wykorzystująca równocześnie funkcje przejścia uzyskane z obu tych sensorów.

W każdym z powyższych procesów identyfikacji defektów obliczenia przeprowadzono w 16-tu iteracjach. Otrzymane wyniki zaprezentowano zbiorczo (w celu porównania) na wykresach przedstawionych na rys. 8.5. Analiza tych wykresów prowadzi do następujących spostrzeżeń i prostych wniosków[52)]:

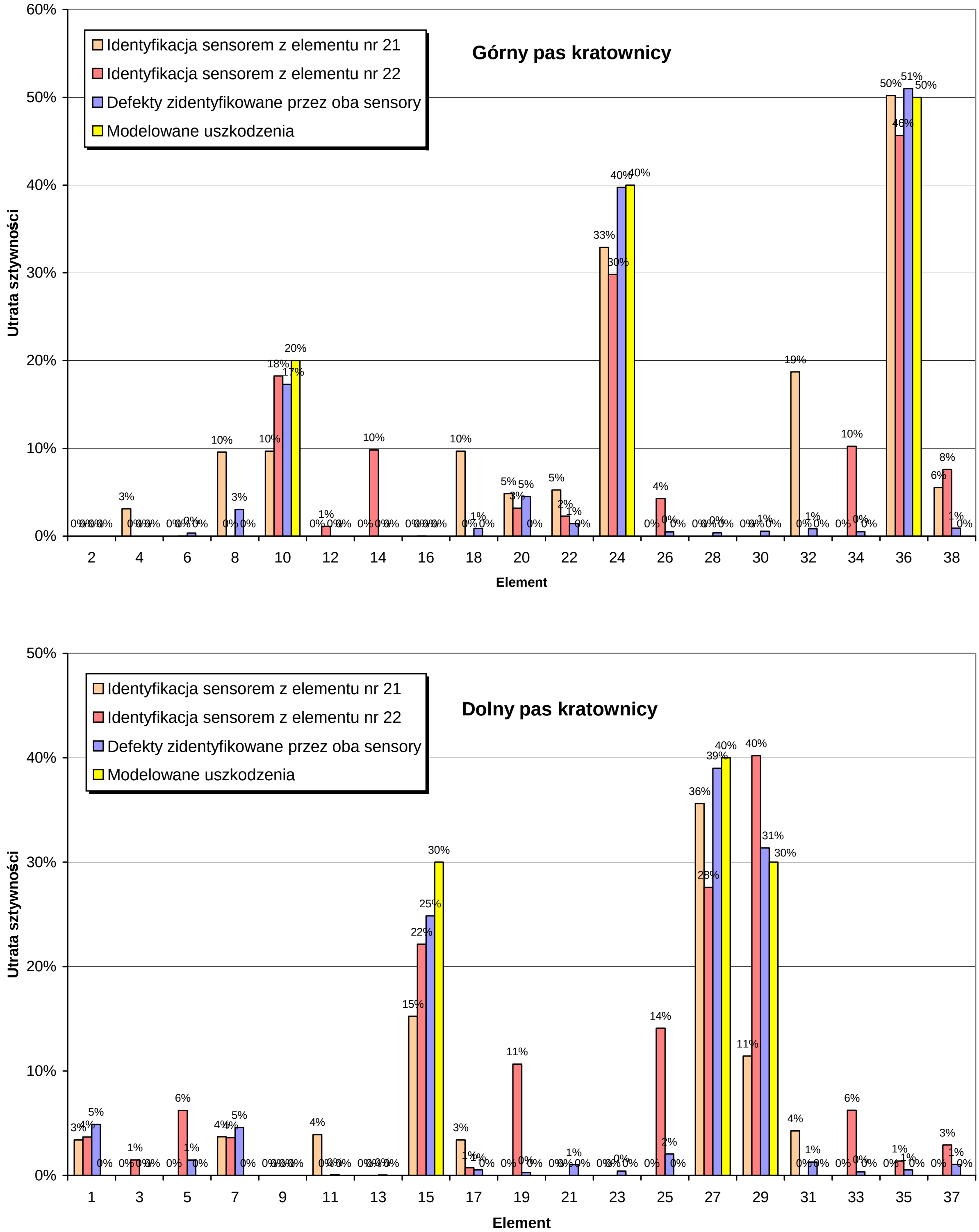
- lepiej wypadła identyfikacja sensorem umieszczonym na elemencie nr 22 niż sensorem z elementu nr 21 (z uwagi na symetrię konstrukcji, rozmieszczenia sensorów i sposobu wymuszenia, widać, że łatwo można otrzymać sytuację odwrotną),
- najbardziej zadawalające rezultaty są oczywiście w przypadku identyfikacji wykorzystującej oba sensory, chociaż lokalizacja uszkodzeń pojedynczym sensorem z elementu nr 22 nie odbiega znacznie od tych wyników (zwłaszcza w przypadku defektów w pasie górnym),
- identyfikacja defektów (nawet w przypadku wykorzystania dwóch sensorów) nie jest całkowicie precyzyjna – zwykle na sąsiednich elementach wykazywane są fałszywe uszkodzenia o niewielkiej intensywności, natomiast w miejscach "rzeczywistej" lokalizacji wykazywana jest zwykle nieco mniejsza intensywność uszkodzenia,

[52)] Szereg podobnych testów numerycznych, jak również opisany dalej eksperyment pozwoliły wysnuć pewne ogólne wnioski dotyczące prezentowanego podejścia do problemu identyfikacji uszkodzeń. Znaleźć je można na końcu tego rozdziału (patrz: podrozdział 8.6).

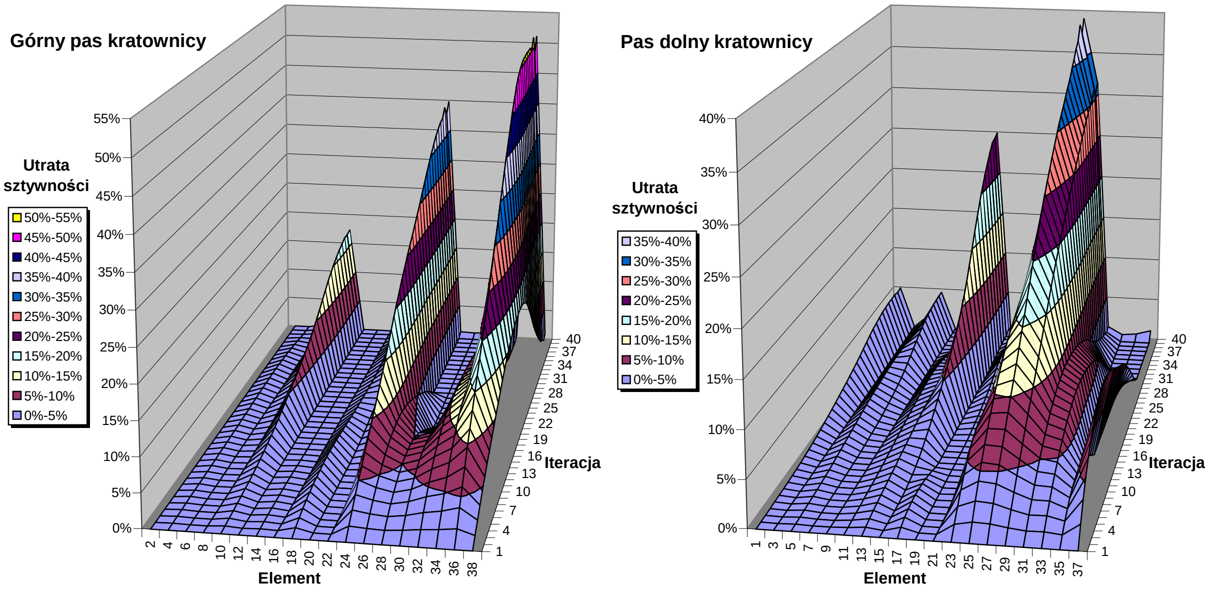




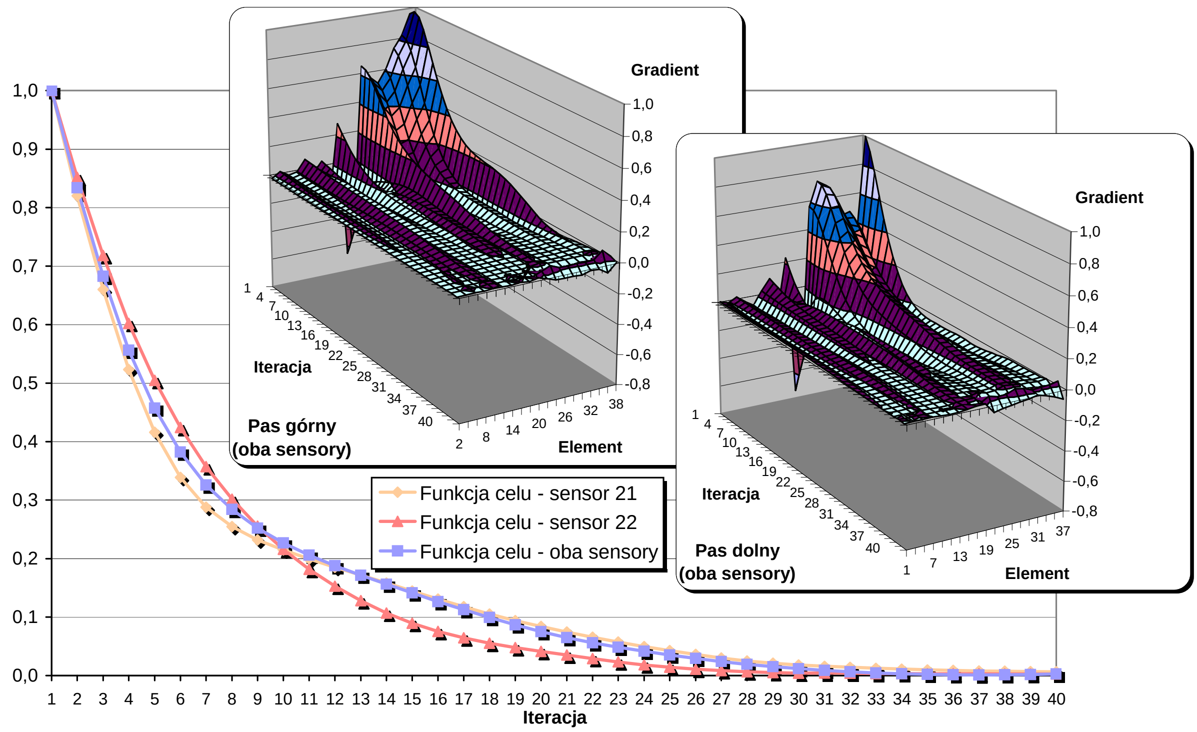
Rys. 8.4. Funkcje przejścia dla kratownicy bez defektów oraz z odpowiednio zamodelowanymi uszkodzeniami (tzw. “odczyty” z sensorów na elementach nr 21 i 22).



Rys. 8.5. Zidentyfikowane defekty w prętach pasów wspornika kratowego. Na każdej pozycji odpowiadającej elementowi z górnego lub dolnego pasa kratownicy wykazano wielkości uszkodzeń zidentyfikowane niezależnie przez każdy z trzech procesów identyfikacji. Pokazano również “prawdziwe” wartości zamodelowanych numerycznie defektów.



Rys. 8.6. Histogram procesu identyfikacji defektów wspornika kratowego (identyfikacja z dwoma sensorami).



Rys. 8.7. Funkcja celu oraz składowe jej gradientu wyznaczone w kolejnych iteracjach procesu identyfikacji defektów wspornika kratowego. Przedstawiono trzy funkcje celu dla trzech niezależnych identyfikacji: z sensorem na elemencie nr 21, z sensorem na elemencie nr 22, oraz przy wykorzystaniu obu tych sensorów naraz. Natomiast składowe gradientu funkcji celu dotyczą tylko procesu identyfikacji z dwoma sensorami. Wartości na wykresach są przeskalowane przez odpowiednią dla nich maksymalną wartość otrzymaną w pierwszej iteracji.

- uszkodzenia powodujące niewielkie, kilkuprocentowe obniżenie sztywności mogą być – przy obecności defektów o znacznie większej intensywności – trudne do zidentyfikowania (jako słabo rozróżnialne od opisanego w poprzednim punkcie efektu "rozmycia").

Rysunek 8.6 prezentuje histogram identyfikacji defektów wykorzystującej funkcje przejścia z obu sensorów, natomiast na rys. 8.7 pokazano (znormalizowane) wykresy zmienności funkcji celu w kolejnych iteracjach dla wszystkich trzech procesów identyfikacji. Na rysunku tym przedstawiono również składowe gradientu funkcji celu wyznaczone w kolejnych iteracjach identyfikacji z dwoma sensorami.

8.5. Identyfikacja defektów w belce wspornikowej oparta na funkcjach przejścia uzyskanych doświadczalnie

8.5.1. Opis eksperymentu[53)]

Celem doświadczenia było uzyskanie odczytów funkcji przejścia dla odpowiednio pobudzonej do drgań sprężystej belki wpornikowej, przy czym miały zostać rozpatrzone dwa przypadki:

1. konstrukcja pierwotna – tj. w założeniu bez defektu,
2. konstrukcja z odpowiednio spreparowanym uszkodzeniem symulującym korozję.

Odpowiedź konstrukcji uzyskana w pierwszym przypadku ma w założeniu służyć głównie weryfikacji modelu numerycznego wspornika, natomiast funkcja przejścia otrzymana dla przypadku belki uszkodzonej stanowić będzie podstawę dla – korzystającego z tego modelu – numerycznego algorytmu identyfikacji defektów. Dobór sygnału wymuszającego drgania oraz wielkość defektu powinny warunkować istotną różnicę pomiędzy obu odczytanymi funkcjami, co jest warunkiem niezbędnym dla powodzenia procesu identyfikacji.

Eksperyment został przeprowadzony na płaskiej aluminiowej beleczce wspornikowej o długości 922 mm i przekroju prostokątnym o wymiarach 20 mm × 5 mm. Moment bezwładności przekroju belki (w płaszczyźnie zginania) wynosi zatem

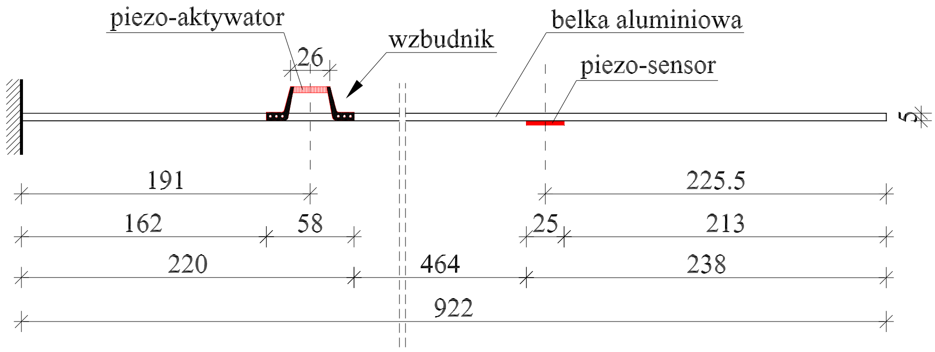
$$J_z = \frac{20\,\mathrm{mm} \cdot (5\mathrm{mm})^3}{12} \approx 208\,\mathrm{mm}^4.$$

Schemat belki przedstawiono na rys. 8.8. Przyjęto, że moduł Younga dla aluminium jest równy 65 780 MPa, natomiast ciężar właściwy wynosi 2710 kg/m^3.

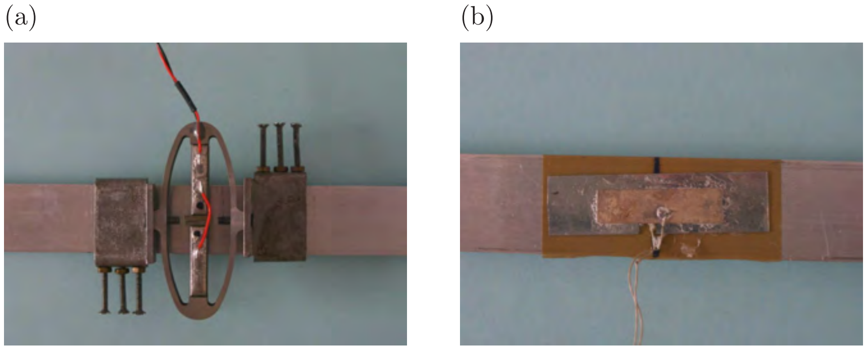
W odległości 191 mm od uwtierdzenia zamocowano na wsporniku piezo-aktywator[54)], natomiast w odległości 225,5 mm od krawędzi swobodnego końca belki naklejono piezo-sensor o długości 25 mm. Piezo-aktywator i piezo-sensor zilustrowano na rys. 8.9, natomiast ich dokładne usytuowanie pokazano na schemacie 8.8.

Piezo-aktywator został przymocowany do belki za pomocą specjalnego sztywnego, stalowego uchwytu, przy czym łączna masa całego wzbudnika (tj. piezo-aktywatora wraz

53) Eksperyment przeprowadzono w ramach projektu *"Piezodiagnostics"*, będącego częścią V-go Programu Ramowego UE. Pomiary wykonała A. Orłowska.
54) Zastosowano *Amplified Piezo Actuator* APA 100M firmy *CEDRAT TECHNOLOGIES*.



Rys. 8.8. Aluminiowa belka wspornikowa.



Rys. 8.9. (a) Wzbudnik z piezo-aktywatorem. (b) Piezo-sensor.

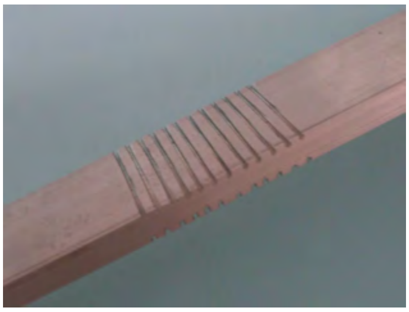
z uchwytem) wyniosła 60 g. Wzbudnik wywoływał w belce falę giętną (odkształcenia związane z propagacją fali podłużnej są całkowicie pomijalne). Wymuszenie miało postać sygnału sinusoidalnego (patrz dalej: rys. 8.13, str. 149) o okresie ok. 7,5 ms, co oznacza częstotliwość ok. 130 Hz, a więc (jak sprawdzono doświadczalnie i potwierdzono numerycznie) bliską czwartej częstości drgań własnych wspornika. Po tym czasie jednak sygnał zanikał, natomiast całkowity czas analizy wynosił 24 ms. Wykonano pomiar funkcji przejścia, który należy interpretować jako funkcję zmiany w czasie krzywizny belki w miejscu naklejenia sensora. Pomiar powtarzano wielokrotnie, a wiarygodny rezultat stanowi średnia arytmetyczna z wszystkich pomiarów (rys. 8.13, str. 149).

Przyjęto, że defekt ma mieć charakter korozji, rozumiejąc przez to, że powinien w istotny sposób wpływać tylko na (lokalne) cechy sztywnościowe i wytrzymałościowe konstrukcji, natomiast w pomijalnie małym stopniu wpływać na zmianę masy. Pomijamy również wpływ defektu na zmianę tłumienia, co jednak nie powinno wprowadzać dodatkowych problemów w związku z faktem, iż czas propagacji jest na tyle krótki, że uwzględnianie tłumienia w ogóle nie jest w ogóle istotne (co sprawdzono). Reasumując, dopuszczalne są tylko uszkodzenia, których powstanie oznacza, iż spełnione są dwa następujące postulaty:

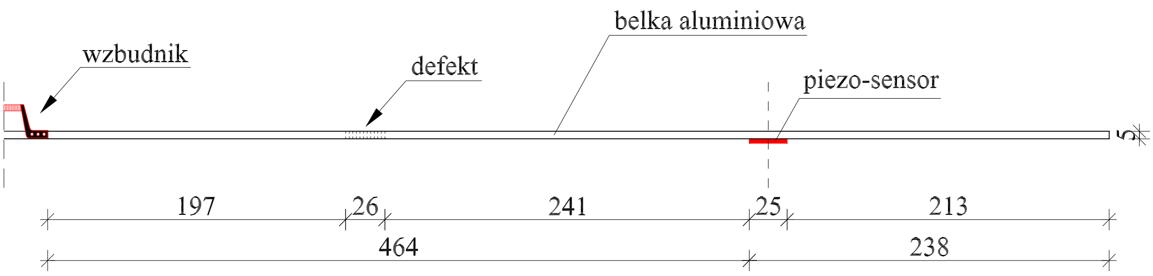
- wyraźne, lokalne obniżenie sztywności,
- brak istotnego ubytku masy.

Uznano, iż symulacja uszkodzenia tego typu może mieć postać regularnych, wąskich nacięć umiejscowionych symetrycznie względem osi głównej, poprzecznie w dolnym i górnym licu belki[55]. Nacięcia takie zmniejszają lokalnie efektywny przekrój belki, a zwłaszcza jego moment bezwładności, nie powodując przy tym istotnego ubytku masy.

Zatem w odległości od 479 mm do 505 mm mierząc od krawędzi swobodnego końca wspornika – a więc na długości 26 mm – wykonano w poprzek belki przez całą jej szerokość 12 par symetrycznych nacięć (każde o szerokości nie większej niż 0,5 mm i głebokości ok. 0,5 mm). Wygląd uszkodzenia oraz jego usytuowanie przedstawiono na rys. 8.10 i 8.11.



Rys. 8.10. Symulowany defekt.



Rys. 8.11. Rozmiar i umiejscowienie defektu.

Sumaryczna głębokość nacięcia dla każdej pary wyniosła około 1 mm, a więc można uznać, że efektywna wysokość przekroju w tym miejscu zmniejszyła się do ok. 4 mm. Oznacza to, że moment bezwładności przekroju w miejscu uszkodzenia można szacować jako równy

$$J_z^{\mathrm{def}} \approx \frac{20\,\mathrm{mm} \cdot (3\,\mathrm{mm})^3}{12} \approx 107\,\mathrm{mm}^4 \approx 51\,\% \cdot J_z,$$

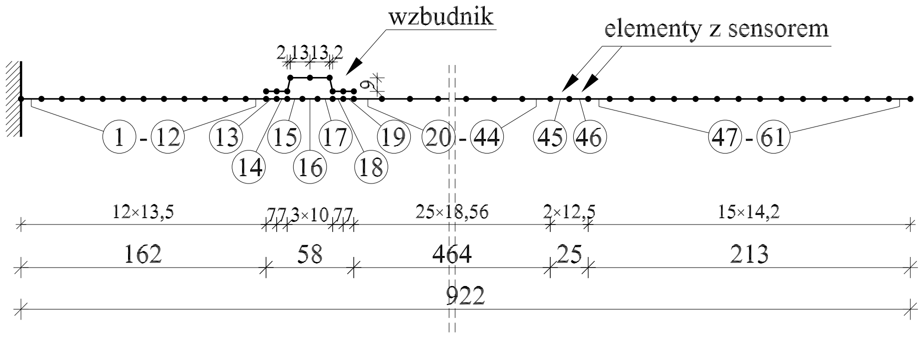
co z kolei oznacza, że lokalnie sztywność zgięciowa uległa mniej więcej połowicznemu zmniejszeniu. Dla tak uszkodzonej belki ponownie wykonano pomiary otrzymując funkcję

[55] W warunkach doświadczalnych zdecydowano się na wykonanie nacięć symetrycznych po obu stronach belki w celu zachowania symetrii efektywnego przekroju względem osi zginania, czyli utrzymania położenia osi obojętnej. Należy jednak sądzić, że powstanie defektu tylko po jednej stronie zaburzyłoby otrzymywane wyniki w sposób nieporównywalnie mniejszy od błędów pomiarowych.

przejścia, która w niewielki, ale istotny sposób różniła się od wyniku uzyskanego dla belki nieuszkodzonej[56]. Funkcje te przedstawiono na rys. 8.13 (str. 149).

8.5.2. Model numeryczny

Wykorzystany w doświadczeniu wspornik jest konstrukcją, która ze względu na swą prostotę jak również cechy geometryczne (proporcje) oraz istotę rozpatrywanego zagadnienia, może i powinna być modelowana przy wykorzystaniu dwuwymiarowych belkowych elementów skończonych. Bardziej skomplikowany model MES (np. wykorzystujący elementy tarczowe lub płytowe, czy też precyzyjnie modelowany wzbudnik) jest niepotrzebny, gdyż otrzymane rezultaty będą z dużą dokładnością odpowiadać wynikom uzyskanym z modelu belkowego. Zastosowano zatem płaskie elementy ramowe, przy czym model samej belki składa się z 61 elementów o długości nieprzekraczającej 19 mm, natomiast wzbudnik z 8-miu (z czego 6 przypada na uchwyt, zaś 2 na piezo-aktywator). Przyjęta dyskretyzacja zapewnia wystarczająco dobrą dystrybucję masy[57] oraz dobrą realizację połączeń wzbudnik – belka. Schemat modelu MES wspornika zaprezetowano na rys. 8.12.



Rys. 8.12. Model MES wspornika.

Elementy nr 45 i 46 zamodelowano tak, aby pokrywały się z lokalizacją 25 milimetrowego sensora. Odczyt na sensorze opisuje sumaryczną zmianę krzywizny tego fragmentu belki. Zgodnie ze wzorem (8.13) jest on proporcjonalny do różnicy pomiędzy obrotami skrajnych węzłów, a więc:

$$Q_{\mathrm{p}}(t) \;\sim\; \varphi_2^{(46)}(t) - \varphi_1^{(45)}(t).$$

Stałą tej proporcjonalności nie określaliśmy deterministycznie (tj. z obliczenia $c_{\mathrm{p}}\, y_{\mathrm{p}}$), lecz wyznaczyliśmy z porównania funkcji przejścia, obliczonej dla modelu MES (która nb. stanowić będzie punkt startowy identyfikacji), z funkcją otrzymaną doświadczalnie przed uszkodzeniem (nacięciem) belki. Obliczenia współczynnika skalującego opierały się na minimalizacji różnicy pomiędzy wartościami obu funkcji w kolejnych chwilach dyskretnej

[56] Niestety pojawił się problem nieuzasadnionego przeskalowania późniejszych odczytów, wynikającego ze zmiany (wraz z upływem czasu) właściwości żywicy, którą wykorzystano do przyklejenia sensora.

[57] Zwłaszcza, że w analizie dynamicznej wykorzystywana będzie konsystentna (a nie diagonalna) macierz bezwładności.

przestrzeni czasowej. Zauważmy, że (z uwagi na liniową zależność funkcji przejścia od obciążeń dynamicznych) wyznaczenie w ten sposób jednego współczynnika skalującego zwolniło nas z konieczności weryfikowania nie tylko charakterystyki piezo-sensora, ale również natężenia (maksymalnej amplitudy) siły oddziaływania piezo-aktywatora.

8.5.3. Identyfikacja

Rysunek 8.13 prezentuje funkcje przejścia otrzymane z eksperymentu dla przypadków: konstrukcji początkowej (tj. nieuszkodzonej) oraz konstrukcji z defektem, jak również funkcje przejścia obliczone na modelu numerycznym:

- dla modelu początkowego, stanowiącego inicjujący punkt dla procesu identyfikacji, oraz
- dla modelu, w którym uwzględniono zidentyfikowane uszkodzenia (po zakończeniu procesu identyfikacji).

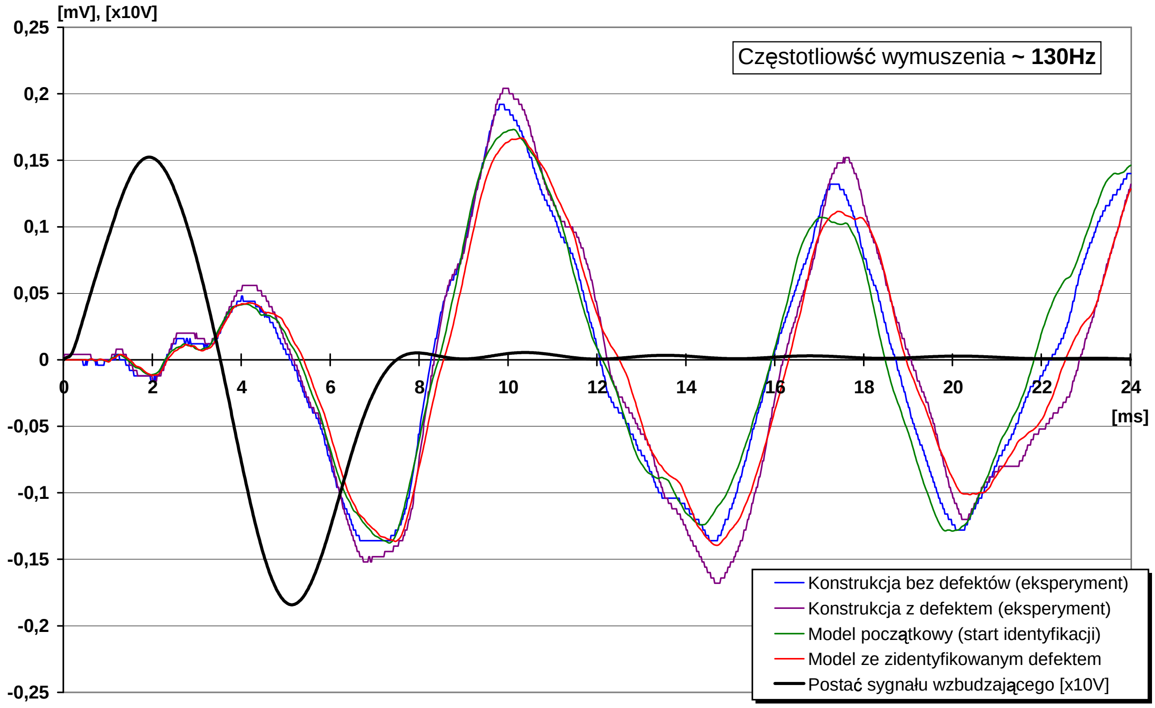
Należy zauważyć, że numeryczna funkcja przejścia uzyskana z modelu, w którym uwzględniono zidentyfikowane defekty, dąży do funkcji przejścia, którą otrzymano z doświadczenia przeprowadzonego na (rozmyślnie) uszkodzonym wsporniku. Na rys. 8.13 przedstawiono również postać sygnału wymuszającego.

Identyfikację przeprowadzono wykorzystując oprogramowanie `MES+MDW`[58)] stworzone od podstaw w języku *Java*. Założono, że ewentualne, *identyfikowalne* defekty mogą występować jedynie na fragmencie wspornika pomiędzy wzbudnikiem, a sensorem. Fragment ten zamodelowano za pomocą 25-ciu belkowych elementów skończonych o jednakowej długości 18,56 mm (elementy nr 20÷44, rys. 8.12). Proces identyfikacji miał 16 iteracji. Rezultaty zamieszczono na rys. 8.14, gdzie zaznaczono również położenie rzeczywistego defektu, który pokrywa cały element 31 i mniej niż połowę elementu 30. Histogram procesu identyfikacji prezentuje rys. 8.15, natomiast na rys. 8.16 pokazano (unormowane) wartości funkcji celu oraz składowych jej gradientu dla kolejnych iteracji procesu identyfikacji uszkodzeń.

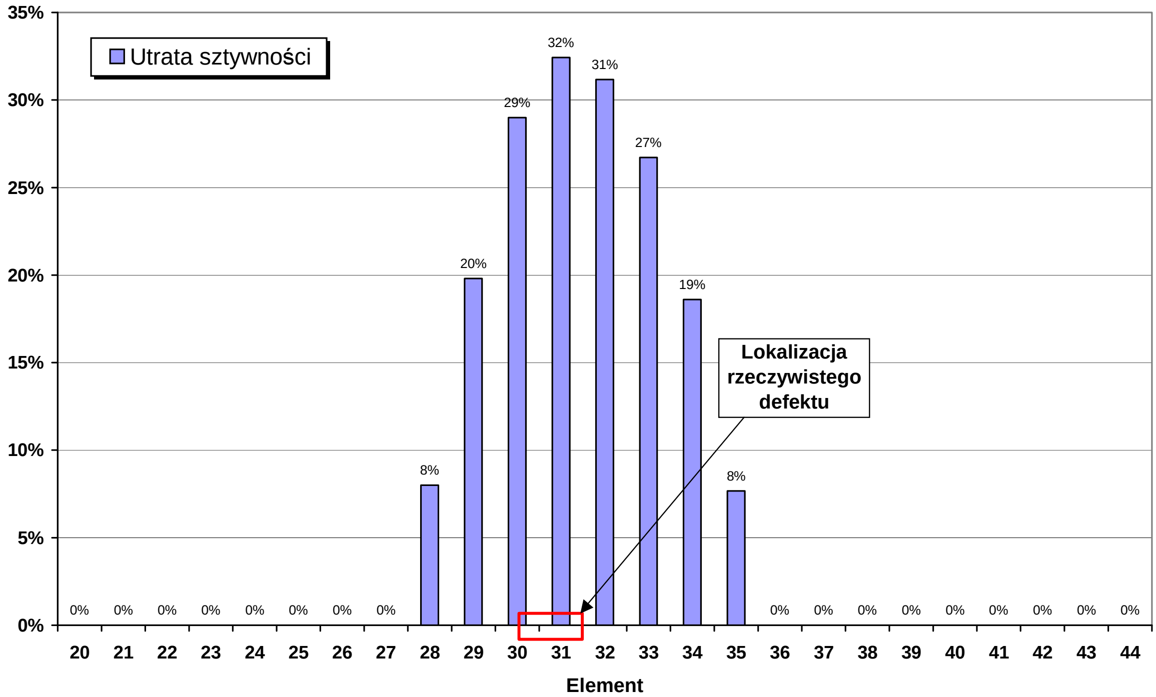
Otrzymane w wyniku identyfikacji rezultaty są "rozmyte" na 8 elementów z maksymalnymi wykazanymi uszkodzeniami przypadającymi na elementy pokrywające się z lokalizacją rzeczywistego defektu (rys. 8.14). Powodem tego jest fakt, iż dla sygnału wymuszającego o przyjętej częstości, wykres funkcji celu jest względnie bardzo "płaski" w dość dużym obszarze stanowiącym sąsiedztwo rozwiązania dokładnego: sprawdzono, że funkcja przejścia dla modelu z defektem na 8-miu elementach w znikomym stopniu różni się od funkcji przejścia otrzymanej dla modelu z defektem o odpowiednio większej intensyw-

---

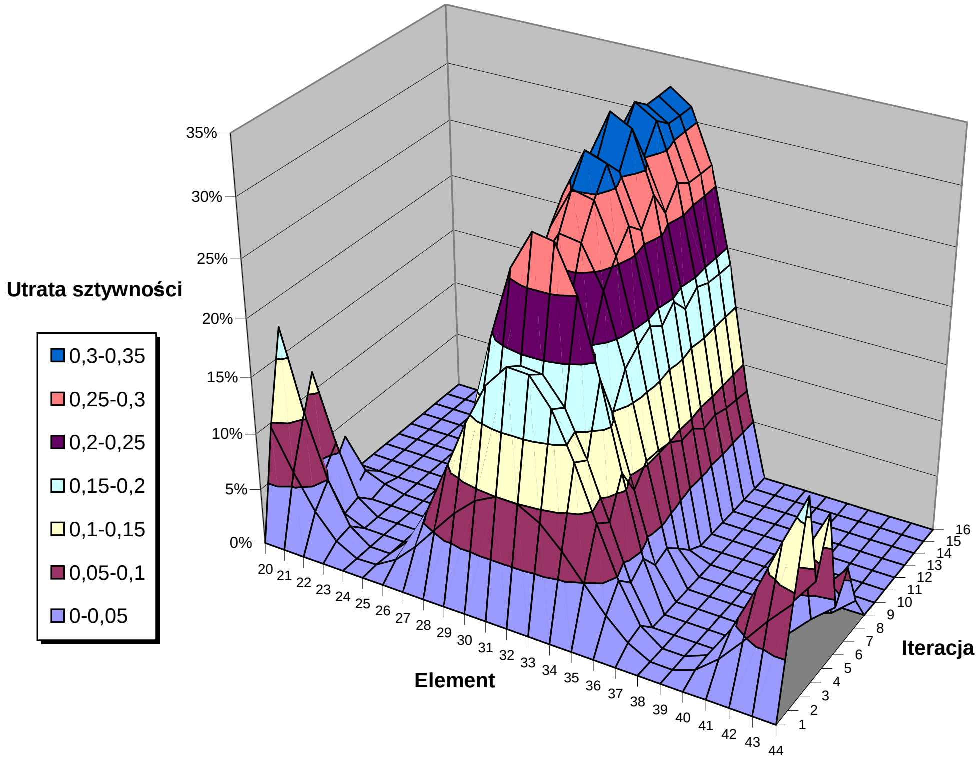
[58)] Program jest obiektową realizacją MES dla mechaniki konstrukcji. Jeden z podpakietów programu stanowią klasy przeznaczone dla MDW (w tym MIDW). Oprócz standardowych klas języka *Java* wykorzystane została biblioteka numeryczna `Colt` – *an Open Source Library for High Performance Scientific and Technical Computing in Java* (`http://cern.ch/hoschek/colt`), pozwalająca na bardzo efektywne programowanie z wykorzystaniem tablic wielowymiarowych (*multidimensional arrays*). Bez żadnych dodatkowych zabiegów program może być wykorzystywany z poziomu programu *MATLAB*, w którym dopisano procedury związane z aspektem wizualnym (wizualizacja modelu konstrukcji, w tym konstrukcji odkształconej, animacja drgań itp.).



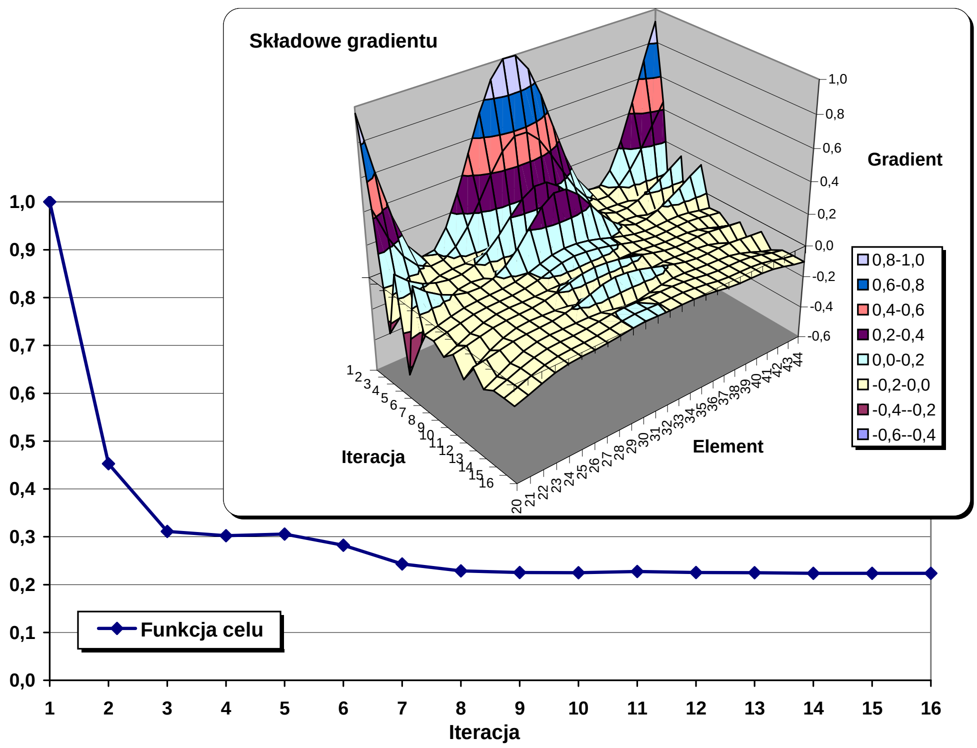
Rys. 8.13. Funkcje przejścia oraz sygnał wymuszający.



Rys. 8.14. Zidentyfikowane defekty.



Rys. 8.15. Histogram identyfikacji defektów.



Rys. 8.16. Wartości funkcji celu oraz składowe jej gradientu wyznaczone w kolejnych iteracjach procesu identyfikacji defektów (wartości są przeskalowane przez wartość maksymalną otrzymaną w pierwszej iteracji).

ności, ale rozłożonym np. tylko na czterech, trzech czy wreszcie tylko dwóch elementach (tu przyjmowano intensywność defektu 50% na elemencie 31 i nieco mniejszą na elemencie 30). Różnice pomiędzy tymi funkcjami są prawie niezauważalne i o wiele mniejsze niż różnica względem doświadczalnych funkcji przejścia obarczonych przecież istotnymi błędami pomiarowymi (wynikającymi głównie z zastosowania nieodpowiedniego środka do przyklejenia sensora).

8.6. Wnioski

Główny problem identyfikacji defektów opartej na gradientowej analizie zmiany propagacji fali sprężystej polega na skomplikowanej, nieregularnej postaci funkcji celu (zdefiniowanej w tym rozdziale), która posiada lokalne minima, "płaskie obszary" itp. Postać ta zależy (oprócz sposobu uszkodzenia konstrukcji) od wielu czynników takich jak rozmieszczenie sensorów, czy postać sygnału wzbudzającego. Z tego powodu niezbędne staje się zastosowanie strategii wspomagających. Przeprowadzone testy numeryczne oraz opisany powyżej eksperyment potwierdzają te konstatacje i pozwalają sformułować przedstawione poniżej wnioski dotyczące zaprezentowanego podejścia do problemu identyfikacji uszkodzeń i pomocne w opracowaniu bardziej zaawansowanych strategii identyfikacji.

- Szanse identyfikacji ogromnie zależą od postaci sygnału wymuszającego. Sygnał powinien wzbudzać drgania związane z szerokim spektrum częstości własnych ustroju, gdyż różne defekty (i ich kombinacje) modyfikują w istotny sposób wiele różnych częstości własnych układu.
- Wielkość możliwych do zidentyfikowania defektów silnie zależy od przyjętego spektrum częstotliwości sygnału wymuszającego, które z zasady nie powinny być zbyt niskie. Jest tak dlatego, że małe, lokalne defekty wpływają na wyższe częstości własne konstrukcji.
- Podejście oparte na analizie jednocześnie kilku (kilkunastu) funkcji przejścia otrzymanych dla sygnałów wymuszających o różnych częstościach (*przeczesywanie* częstotliwości) z pewnością zwiększy szanse i dokładność procesu identyfikacji i jest łatwe do zrealizowania.
- Na podobnej zasadzie szanse identyfikacji wzrosną, gdy będziemy stosować odpowiednio modelowane sygnały wymuszające (np. w postaci liniowej kombinacji wielu funkcji sinus o okresach odpowiadających różnym częstościom własnym konstrukcji itd.). Postać wymuszenia powinna wzbudzać drgania układu związane z szerokim spektrum jego częstości własnych.
- Zwiększenie liczby sensorów jest niezbędne dla bardziej rozległych konstrukcji. Wiąże się z tym również istotne zagadnienie efektywnej lokalizacji sensorów.
- Uszkodzenia mogą zostać w miarę poprawnie zlokalizowane nawet przy znacznych błędach pomiarowych, o ile błędy te dotyczą głównie amplitudy funkcji przejścia, a nie jej widma.

Rozdział 9

Podsumowanie

9.1. Wnioski końcowe

- Stanowiąca główny temat pracy oryginalna Metoda Impulsowych Dystorsji Wirtualnych jest wynikiem zastosowania metody impulsowej funkcji przejścia do koncepcji dystorsji wirtualnych (znanej z wielu zastosowań w statyce).
- Dystorsje wirtualne w MIDW są funkcjami zależnymi od czasu i jako takie służą do modelowania modyfikacji parametrów sztywnościowych konstrukcji obciążonej dynamicznie, przy czym pierwotny model ustroju nie ulega zmianie.
- Nie przedstawiono natomiast możliwości dystorsyjnego modelowania zmian masy, co z pewnością stanowi istotne ograniczenie. Nie zajmowano się również modelowaniem zmian tłumienia, z uwagi na trudności w modelowaniu już samego zjawiska tłumienia oraz fakt, że w przypadku problemów, w których można stosować MIDW zwykle nie będzie ono odgrywało istotnej roli (ze względu na koszty numeryczne, dla MIDW sugerowany jest raczej krótki czas analizy dynamicznej).
- MIDW można stosować do modelowania defektów w konstrukcjach prętowych, gdzie rysy i pęknięcia zmniejszają *efektywne* pole przekroju elementu obniżając tym samym jego sztywność konstrukcyjną, a nie zmieniają w istotny sposób jego masy.
- Można ją również wykorzystywać do modelowania korozji, zwłaszcza w początkowym stadium rozwoju, gdy nie nastąpił jeszcze istotny ubytek masy.
- Omówiona idea identyfikacji defektów oparta na MIDW powinna wykorzystywać również dodatkowe, zaawansowane techniki wspomagające. Strategie te można

oprzeć na wykorzystaniu w jednym procesie identyfikacji całej gamy funkcji przejścia otrzymanych dla wielu odpowiednio dobranych i modelowanych sygnałów wzbudzających.

9.2. Oryginalne koncepcje oraz osiągnięcia pracy

- Samodzielnie opracowano zagadnienie i algorytmy metod dystorsyjnych dla konstrukcji składającej się z dowolnych elementów skończonych (szczegółowo rozpatrując przy tym przypadek elementu skończonego ramy płaskiej). Podano przepis realizacji aspektu dystorsyjnego w dowolnym elemencie skończonym, możliwiający korzystanie z wypracowanych, ogólnych procedur dystorsyjnych. Usystematyzowano terminologię i opis zagadnienia dystorsji wirtualnych w ustrojach dyskretnych MES, wprowadzając pojęcia lokalizacji dystorsyjnej i zbioru lokalizacji dystorsyjnych, korzystając z definicji liniowej funkcji odpowiedzi, wprowadzając rozróżnienie na odkształceniową i ogólną macierz wpływu (z uwypukleniem ich ról).
- Wprowadzono i efektywnie oprogramowano prostą i dość oczywistą, ale bardzo istotną koncepcję polegającą na posługiwaniu się dwoma niezależnymi, choć jednoznacznie skorelowanymi wielkościami: wektorem modyfikacji parametrów konstrukcyjnych oraz wektorem zmiany sztywności konstrukcji, co jest wygodniejsze i ułatwiło abstrakcyjną (tj. ogólną, niezależną od elementu skończonego) realizację algorytmów dystorsyjnych, dostarczając przy tym dodatkowych możliwości (np. bardzo naturalna realizacja koncepcji modelowania zbioru elementów).
- Opracowano oryginalną Metodę Impulsowych Dystorsji Wirtualnych pozwalającą na stosowanie metod dystorsyjnych w zagadnieniach dynamiki dyskretnych układów liniowych. Zdefiniowano pojęcia impulsu dystorsji wirtualnej, dystorsji dynamicznej oraz impulsowej macierzy wpływu. W ramach prac nad MIDW między innymi:
  - opracowano algorytm obliczania impulsowej macierzy wpływu stanowiącej fundament dla pozostałych obliczeń,
  - wyprowadzono równania pozwalające na efektywne obliczanie dystorsji dynamicznych modelujących modyfikację sztywnościową ustroju pod obciążeniem dynamicznym.
- Na bazie MIDW sformułowano ideę wykorzystania zależnych od czasu funkcji dystorsji wirtualnych (tj. dystorsji dynamicznych) dla analizy wrażliwości sztywnościowej liniowego ustroju dynamicznego.
- Skonstruowano algorytm gradientowej analizy funkcji przejścia oraz (wykorzystując pewne szczególne własności) wprowadzono usprawnienia optymalizacyjne, które w istotny sposób zwiększają efektywność przeprowadzanych obliczeń. Pokazano, że istotę obliczeń stanowi gradient dystorsji dynamicznych.
- Określono klasę funkcji celu bazujących na zależności pomiędzy funkcją przejścia, a parametrami sztywnościowymi konstrukcji. Wykazano, że wyznaczenie gradientu funkcji celu, spełniającej podane postulaty, polega w zasadzie na obliczeniu analo-

gicznego gradientu odpowiedniej funkcji przejścia (wykorzystując wspomniany algorytm).

- Stworzono od podstaw (w języku *Java*) efektywną, obiektowo-zorientowaną implementację opracowanych metod i algorytmów opartą na (napisanym w tym celu) obiektowym programie MES dla mechaniki konstrukcji. Z pewnością po raz pierwszy zrealizowano w pełni obiektowe ujęcie metod dystorsyjnych – zarówno statycznej, jak i impulsowej. Całe oprogramowanie można bardzo efektywnie i wygodnie wykorzystywać w popularnym i uznanym programie *MATLAB*, gdzie m.in. dopisano procedury związane z wizualizacją konstrukcji, animacją drgań dynamicznych itp.
- Wykorzystano opracowane algorytmy w zagadnieniu identyfikacji defektów modelowanych jako lokalna utrata sztywności konstrukcji. Stworzone oprogramowanie wykorzystano w tym celu do analizy spowodowanego defektem zaburzenia propagacji fali sprężystej.
- Pierwsze siedem rozdziałów pracy stanowi spójną monografię dotyczącą algorytmów i idei, które są fundamentalne dla Metody Dystorsji Wirtualnych i Metody Impulsowych Dystorsji Wirtualnych. W cytowanych publikacjach można znaleźć wiele realizacji i pomysłów zastosowań MDW.

Bibliografia

1. M. A. Akgün, J. H. Garcelon, R. T. Haftka, Fast exact linear and non-linear structural reanalysis and the Sherman–Morrison–Woodbury formulas, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 50, 2001.

2. K.-J. Bathe, *Finite Element Procedures in Engineering Analysis*, Prentice Hall, 1981.

3. K.-J. Bathe, E. L. Wilson, *Numerical Methods in Finite Element Method*, Prentice Hall, 1976.

4. Cz. Branicki, R. Ciesielski, Z. Kacprzyk, J. Kawecki, Z. Kączkowski, G. Rakowski, *Mechanika Budowli. Ujęcie komputerowe, Tom 1*, Arkady, Warszawa 1991.

5. T. Chmielewski, Z. Zembaty, *Podstawy dynamiki budowli*, Arkady, Warszawa 1998.

6. R. Ciesielski, A. Gomuliński, Z. Kacprzyk, J. Kawecki, J. Langer, G. Rakowski, Z. Reipert, M. Witkowski, *Mechanika Budowli. Ujęcie komputerowe, Tom 2*, Arkady, Warszawa 1992.

7. A. Garstecki, A. Glema, Sensitivity analysis and optimal redesign of columns in the state of initial distortions and prestress, *Structural Optimization*, Vol. 3, 1991.

8. J. Gierliński, J. Holnicki-Szulc, J. D. Sorensen, Sensitivity analysis of structures by Virtual Distortion Method, *Proc. of the 3rd IFIP Conference on Reliability and Optimization of Structural Systems* Berkeley, USA, 1990.

9. A. Gomuliński, M. Witkowski, *Mechanika budowli. Kurs dla zaawansowanych.*, Vol. 3, 1991.

10. J. Holnicki-Szulc, Distortion problems in bar structures, *Proc. Symposium of International Association for Shell and Spatial Structures on Industrialized Shell and Spatial Structures*, June, Kielce, 1973.

11. J. Holnicki-Szulc, Problemy sprężania ośrodków dwufazowych, *Mechanika Teoretyczna i Stosowana*, Vol. 18, No. 1, 1976.

12. J. Holnicki-Szulc, Prestress of truss and frame structures, *Journal of Structural Engineering ASCE*, Vol. 105, No. 3, 1979.

13. J. Holnicki-Szulc, R. Haftka, Degradation od elastic structures – simulation by initial distortions, *Mechanics of Structures and Machines*, Vol. 15, No. 1, 1987.

14. J. Holnicki-Szulc, Optimal structural remodelling – simulation by virtual distortions, *Communications in Applied Numerical Methods*, Vol. 5, No. 5, 1989.

15. J. Holnicki-Szulc, *Dystorsje w układach konstrukcyjnych. Analiza, sterowanie, modelowanie*, Biblioteka Mechaniki Stosowanej, Seria A. Monografie, IPPT PAN, PWN, Warszawa – Poznań 1990.

16. J. Holnicki-Szulc, *Virtual Distortion Method*, Lecture Notes in Engineering, Vol. 65, edited by C. A. Brebbia and S. A. Orszag, Springer-Verlag, Berlin – Heidelberg 1991.

17. J. Holnicki-Szulc, Damping of vibration by actively controlled initial distortions, *J. Aerospace Eng. ASCE*, Vol. 4, No. 1, 1991.

18. J. Holnicki-Szulc, Analysis of prestressed visco-elastic structures by the Virtual Distortion Method, *Engineering Transactions*, Vol. 40, No. 1, 1992.

19. J. Holnicki-Szulc, Optimal design of adaptive composites – Virtual Distortion Method approach, *Proc. 5th AIAA/NASA/USAF/ISSMO Symposium on Multidisciplinary Optimization,*, May, Goslar, Germany, 1994.

20. J. Holnicki-Szulc, J. T. Gierliński, Structural modifications simulated by initial distortions, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 28, No. 3, 1889.

21. J. Holnicki-Szulc, J. T. Gierliński, *Structural Analysis, Design and Control by the Virtual Distortion Method*, John Wiley & Sons, Chichester 1995.

22. J. Holnicki-Szulc, R. Haftka, Vibration mode shape control by prestressing, *AIAA Journal*, Vol. 30, No. 7, 1992.

23. J. Holnicki-Szulc, P. Kołakowski, N. Nasher, Identification of leakages in water networks – Virtual Distortion Method approach, *Proc. of the 5th World Congress of Structural and Multidisciplinary Optimization*, 19-23 May, Lido di Jesolo, Italy, 2003.

24. J. Holnicki-Szulc, Z. Mróz, Active control of stresses and deflections of elastic structures by means of imposed distortions, *Proc. of the 2nd Int. Symposium on Structural Control*, University of Waterloo, 1985.

25. J. Holnicki-Szulc, P. Pawłowski, M. Wikło, High performance impact absorbing materials – the concept, design tools and applications, *Smart MAterials and Structures*, Vol.12, 2003.

26. J. Holnicki-Szulc, M. Wikło, Adaptive multifolding microstructures, *Proc. Smart Technology Demonstrators and Devices*, 12-14 December, Edinburgh, UK, 2001.

27. J. Holnicki-Szulc, M. Wikło, Adaptive microstructures, *Proc. VIII French-Polish Conference on Mechanics*, Warsaw University of Technology, SIMR, Warsaw, 2001.

28. J. Holnicki-Szulc, T. G. Zieliński, Damage identification method based on analysis of perturbation of elastic waves propagation, *Proc. 2nd International Workshop on "Structural Health Monitoring"*, Stanford University, 8-10 September 1999, Palo Alto, USA.

29. J. Holnicki-Szulc, T. G. Zieliński, New damage identification method through the gradient based optimisation, *Proc. COST International Conference on "System Identification & Structural Health Monitoring"*, Madrid, 6-9 June 2000.

30. J. Holnicki-Szulc, T. G. Zieliński, Damage identification method based on analysis of perturbation of elastic waves propagation, *Proc. SMART'01 Advanced Course on "Structural Control and Health Monitoring"*, Warsaw, 22-25 May 2001.

31. D. J. Inman, *Engineering Vibrations*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey 1996.

32. M. Kleiber, *Wprowadzenie do metody elementów skończonych* PWN, Warszawa-Poznań, 1989.

33. L. Knap, J. Holnicki-Szulc, *Optimal design of adaptive structures for the best crashworthiness*, *Proc. 3rd World Congress of Structural and Multidisciplinary Optimization*, 17-21 May, Buffalo, USA 1999.

34. L. Knap, J. Holnicki-Szulc, *Optimal design of adaptive structures for best crashworthiness*, *Proc. of Polish-German Seminar on Development Trends in Design of Machines and Vehicles*, October, Köln, Germany.

35. P. Kołakowski, *Analiza wrażliwości i optymalne projektowanie konstrukcji kratowych Metodą Dystorsji Wirtualnych*, Prace IPPT PAN, Warszawa 1998.

36. P. Kołakowski, J. Holnicki-Szulc, Optimal remodelling of truss structures – simulation by virtual distortions, *Computer Assisted Mechanics and Engineering Sciences*, Vol. 4, 1997.

37. P. Kołakowski, J. Holnicki-Szulc, Sensitivity analysis of truss structures (Virtual Distortion Method approach), *Int. Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 43, 1998.

38. Y. W. Kwon, H. Bang, *The Finite Element Method using MATLAB*, CRC Press, Boca Raton, Florida 1997.

39. A. Maćkiewicz, J. Holnicki-Szulc, F. López-Almansa, Optimal location of actuators for active stress control *Proc. of the 1st Europeen Conference on Structural Control*, Barcelona, 29-31 May, 1996.

40. P. V. Makode, M. R. Ramirez, R. B. Corotis, Reanalysis of rigid frame structures by the Virtual Distortion Method, *Structural Optimization*, Vol. 11, 1996.

41. W. Nowacki, *Teoria sprężystości* (wyd. 2), PWN, Warszawa 1970.

42. W. Nowacki, Distortion problem in micropolar elasticity, *Bull. Acad. Polon. Sci.*, Vol. 21, 1973.

43. A. Preumont, *Vibration Control of Active Structure*, Kluwer Academic Publ., 1997.

44. A. Preumont, Active vibration control, *Proc. SMART'01 Advanced Course on "Structural Control and Health Monitoring"*, Warsaw, 22-25 May 2001.

45. J. S. Przemieniecki, *Theory of Matrix Structural Analysis*, Dover Publications, Inc., New York 1985.

46. J. Putresza, Sub-incremental technique for elasto-plastic analysis of frames using the Virtual Distortion Method, *Report of WS Atkins Safety & Technology*, Epsom, UK, 1995.

47. G. Rakowski, Z. Kacprzyk, *Metoda elementów skończonych w mechanice konstrukcji*, Oficyna Wyd. Politechniki Warszawskiej, Warszawa 1993.

48. J. Sobieszczański-Sobieski, Structural modification by Perturbation Method, *Journal of Structural Engineering ASCE*, Vol. 94, No. 12, 1968.

49. R. C. Turner, J. T. Gierliński, G. M. Zintilis, M. J. Baker, J. Holnicki-Szulc, The Virtual Distortion Method applied to the reliability analysis of offshore structures, *Proc. of the 2nd IFIP Conference on Reliability and Optimization of Structural Systems*, London, UK, 1988.

50. D. Wiącek, J. Holnicki-Szulc, Damage prediction in historical buildings, *Proc. of the 2nd World Congress of Structural and Multidisciplinary Optimisation*, 17-21 May, Zakopane, 1997.

51. D. Wiącek, J. Holnicki-Szulc, Progressive damage analysis in historical buildings – VDM approach, *Proc. of the 5th International Conference on Computational Plasticity*, 17-20 March, Barcelona, 1997.

52. D. Wiącek, J. Holnicki-Szulc, Optimal reinforcement of historical buildings (Virtual Distortion Method approach), *Proc. of the 3rd World Congress of Structural and Multidisciplinary Optimisation*, 17-21 May, Buffalo, USA, 1999.

53. D. Wiącek, *Monitorowanie, ocena i przewidywanie rozwoju zniszczeń w budynkach historycznych*, Praca doktorska, Warszawa, 2001.

54. O. C. Zienkiewicz, *The Finite Element Method*, McGraw-Hill, 1997.